

UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA

Estudios con Reconocimiento de Validez Oficial por Decreto Presidencial
Del 3 de abril de 1981



LA VERDAD
NOS HARÁ LIBRES

UNIVERSIDAD
IBEROAMERICANA

CIUDAD DE MÉXICO ®

Modelo simplificado de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles con operadores de orden no entero

TESIS

Que para obtener el grado de
Doctora en Ciencias de la Ingeniería

presenta

M.I. Milagros del Carmen Santos Moreno

Bajo la dirección de

Dr. Guillermo Fernández Anaya

Dra. Carla Victoria Valencia Negrete

Lectores:

Dr. Rogelio Valdés Herrera

Dr. Marco Antonio Polo Labarrios

Dr. Sergio Baz Rodríguez

Dr. Martín Rivera Toledo

Departamento de Física y Matemáticas

Ciudad de México, mayo, 2024

Índice general

Notación	v
Resumen	3
Introducción	5
1. Antecedentes	7
1.1. Derivadas de orden no entero	7
1.2. Derivadas Conformables	10
1.2.1. Derivadas conformables generalizadas	11
1.2.2. Funciones de la derivada conformable generalizada	14
1.2.3. Marco multivariable de los operadores conformables	16
1.3. Ecuaciones de Navier-Stokes	18
1.3.1. Modelo simplificado de N-S (clásico) y su solución	19
2. Derivadas Conformables Generalizadas en las Ecuaciones de Navier-Stokes	23
2.1. Modelo generalizado de N-S incluyendo el marco multivariable de las derivadas conformables	23
2.1.1. Modelo generalizado N-S con derivadas de Khalil	25
2.1.2. Modelo simplificado con derivada de Khalil a partir de las ecuaciones generalizadas N-S	26
2.2. Selección de nuevas funciones en las derivadas conformables	27
2.2.1. Función conformable ψ_1 y su derivada	29
2.2.2. Función conformable ψ_2 y su derivada	31
2.3. Modelo simplificado con derivada conformable	34
2.3.1. Modelo difusivo conformable- ψ_1	34
2.3.2. Modelo conformable- ψ_2	36
2.3.3. Comparación entre modelos conformables y el modelo clásico	39
3. Modelos conformables describiendo el flujo en medios porosos	41
3.1. Flujo a través de medios porosos	41
3.1.1. Brinkman con permeabilidad constante	43
3.1.2. Brinkman con permeabilidad variable	43
3.2. Comparación de los modelos de Brinkman con los conformables	44
3.2.1. Modelos conformables optimizados describiendo el flujo de Brinkman con permeabilidad constante	45

3.2.2.	Modelo ψ_1 validado con datos experimentales para un modelo de Brinkman con permeabilidad constante.....	47
3.2.2.1.	Permeabilidad como función de los parámetros conformables	50
3.2.3.	Modelos Conformables describiendo el modelo de Brinkman con permeabilidad variable.....	53
3.3.	Modelo fraccionario de Caputo comparado con los modelos conformables y el medio poroso	55
3.3.1.	Modelos de orden no entero describiendo el flujo a través del medio poroso con permeabilidad constante.....	56
3.3.2.	Modelos de orden no entero describiendo el flujo a través del medio poroso con permeabilidad variable	58
4.	Factor de fricción conformable como modelo unificado de algunos medios porosos	61
4.1.	Factor de fricción para flujo laminar	61
4.1.1.	Factor de fricción en medios porosos.....	63
4.2.	Nuevo modelo conformable basado en un parámetro de los medios porosos	65
4.2.1.	Nueva función conformable $\psi_3(y, \alpha)$	65
4.2.2.	Modelo conformable- ψ_3 para flujo a través de dos placas paralelas	66
4.2.3.	Factor de fricción conformable	68
4.3.	Factor de fricción conformable como modelo unificado para medios porosos	69
4.3.1.	Factores de fricción en medios porosos con permeabilidad constante y conformables	69
4.3.2.	Factores de fricción en medios porosos con permeabilidad variable y conformable.....	71
4.3.3.	Validación de los factores conformables con modelos ajustados a experimentos	73
4.3.4.	Factores de fricción de orden no entero representando flujo en medios porosos	75
	Conclusiones	77
	A. Proceso de optimización de parámetros para ajustar modelos conformables a modelo de Brinkman	83
	Bibliografía	85

Notación

símbolo	definición	unidades
a	parámetro conformable	
b	parámetro conformable	$m^{potencia}$
v_x	velocidad	m/s
y	variable espacial	m
h	distancia entre las placas	m
dP/dx	gradiente de presión	Pa/m
Q	flujo volumétrico por unidad de longitud	m^2/s
K	permeabilidad	m^2
V	velocidad promedio	m/s
v'	velocidad del modelo de Brinkman	m/s
α	exponente fraccionario	[1]*
β	exponente fraccionario de Caputo	[1]*
μ	viscosidad	Pa s
μ_c	viscosidad conformable	Pa s
μ_e	viscosidad aparente (medio poroso)	Pa s
ρ	densidad	m^3/kg

*Adimensional

Números adimensionales

$Re = \rho V h / \mu$	Número de Reynolds
$Da = K / h^2$	Número de Darcy
$Ha = \mu h^2 / (K \mu_e)$	Número de Hamdan

Agradecimientos

A Guillermo y Carla por todos sus consejos y guía en este trabajo.

Al CONAHCyT por la beca.

A FICSAC por el apoyo económico.

A la Ibero por la beca para realizar el posgrado.

A mi familia, mis amigas, amigos, compañeras y compañeros de trabajo.

Resumen

En este trabajo se proponen y emplean tres funciones conformables, una de tipo exponencial (ψ_1) y dos de tipo racional (ψ_2 , ψ_3), para definir nuevas derivadas conformables. Estas derivadas se incluyen en el modelo simplificado de las ecuaciones de Navier-Stokes (N-S) que describe el flujo en régimen permanente a través de dos placas paralelas. Los modelos conformables presentan soluciones analíticas, y se calculan las expresiones para el flujo volumétrico y el factor de fricción.

Se obtienen intervalos de aplicación para cada modelo con base en el número de Darcy (Da) y el error absoluto entre el modelo de medio poroso y la nueva propuesta. Así como una interpretación física mediante la comparación de los modelos de orden no entero con los modelos de flujo a través de medios porosos.

El primer modelo conformable resulta útil para describir flujos a través de medios que pueden ser definidos con el modelo de Brinkman de permeabilidad constante, mientras que el ψ_2 es más útil para el modelo de permeabilidad variable.

La forma de la función para el tercer modelo conformable está inspirada por una de las expresiones de permeabilidad como función de la porosidad, por lo que su aplicación a medios porosos resulta inmediata. Su evaluación se realiza a través del factor de fricción, probando que puede ser empleado como un modelo unificado para flujos descritos por la Ley de Darcy, Brinkman y algunos modelos para fracturas en rocas.

Introducción

Las ecuaciones de Navier Stokes (N-S) han sido una herramienta fundamental para modelar el flujo de fluidos newtonianos compresibles e incompresibles, como el agua y el aire. Particularmente en ingeniería, las formas simplificadas de estas ecuaciones se han empleado para definir perfiles de velocidad en tuberías; para estimar variables medibles en procesos (velocidad, presión, densidad, flujo volumétrico, etc); para definir y desarrollar relaciones empíricas como el factor de fricción, pieza fundamental en el estudio de flujo de fluidos a través de tuberías y su selección; para la estimación de propiedades en viscosímetros; entre otras. Además de su continuo uso en ingeniería, estas ecuaciones en conjunto con las de transporte de masa se han empleado para describir flujos en sistemas biológicos como el flujo sanguíneo [1] o en aplicaciones médicas [2], en redes de distribución de agua potable [3], para estudiar contaminantes en suelos y ríos [4], para analizar las corrientes oceánicas [5], para estudiar la distribución de partículas contaminantes en el aire [6], para describir el flujo de aire a través de bosques [7], entre otras.

A pesar de sus múltiples aplicaciones, las ecuaciones N-S presentan limitaciones para definir algunos fenómenos físicos, como la turbulencia, así como para obtener el teorema de existencia y unicidad de la solución en tres dimensiones; por lo que se han implementado diversas herramientas matemáticas para intentar predecir flujos más complejos a través de sus formas simplificadas. Una de las herramientas empleadas es el cálculo de orden no entero, el cual ha permitido explorar cómo las derivadas fraccionarias y conformables modifican y amplían el uso de ciertos modelos simplificados. Por ejemplo, algunos autores introducen derivadas temporales de orden fraccionario a N-S enfocándose en la obtención de soluciones analíticas y numéricas [8], [9], [10], mientras que otros trabajos han definido interpretaciones físicas para estos modelos fraccionarios, relacionándolos con procesos de difusión anómala o como contribución de memoria al proceso [11]. Otra forma de estudiar el impacto de los operadores de orden no entero en modelos simplificados es mediante derivadas espaciales (univariable y multivariable), este es el caso del trabajo desarrollado por Xu y Jiang, en el que analizaron la difusión unidireccional en

placas [12], mientras que He estudió la difusión en medios porosos [13] y Sayevand et al, analizaron la estabilidad y convergencia de soluciones numéricas [14], también se ha analizado para describir la difusión anómala [15], así como procesos turbulentos y capa límite [16].

Éstos y otros estudios más han demostrado que la diversidad de operadores no enteros representa una gran área de oportunidad para describir problemas más complejos con ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos, y aunque actualmente se han realizado aportaciones que gustan más del ejercicio matemático, de la construcción de la ecuación y de las soluciones a obtener, se ha dejado un poco de lado la interpretación física que supone introducir estos operadores a una ecuación de balance de fuerzas. Con la finalidad de abordar el problema de la interpretación física, resulta indispensable analizar con detalle los alcances de cada operador de orden no entero, sea de una variable o multivariable, así como conectar sus resultados a procesos físicos particulares, es por ello que este trabajo propone incluir una derivada conformable a un modelo simplificado, obtener las soluciones correspondientes al problema de flujo, y confirmar que este nuevo modelo es capaz de generalizar en cierto grado la descripción del flujo, y conectar esta información con una aplicación en el área de la ingeniería. Esta propuesta se presenta en 3 partes principales: selección del operador conformable, análisis del perfil de velocidad obtenido del modelo simplificado del flujo a través de dos placas paralelas y, finalmente, el análisis de los parámetros conformables en la representación de un flujo a través de un medio poroso.

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo se realiza una revisión de las herramientas que se emplean en la metodología del trabajo de investigación, las derivadas de orden no entero y su clasificación; se muestran ejemplos de los operadores y, particularmente, se detallan las características principales de las derivadas conformables, así como la descripción básica de las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales describen el movimiento de los fluidos.

1.1. Derivadas de orden no entero

El cálculo de orden no entero, también llamado cálculo fraccionario, se considera una generalización del cálculo diferencial clásico [17]. Su origen es asociado a un intercambio epistolar entre L'Hôpital y Leibniz, en el cual se cuestionó la posibilidad de extender la derivada de orden entero a valores fraccionarios. Sin embargo, fue hasta inicios del siglo XIX que aparecieron las primeras publicaciones y conferencias sobre este tema [18].

El auge del cálculo de orden no entero se debe a que sus operadores han podido representar fenómenos que para el cálculo clásico han sido difíciles de modelar, incluyendo propiedades de no localidad y efectos de memoria [19], en múltiples áreas como: reología, procesos de transporte, procesos biológicos, elasticidad, etc [17]; también se les ha atribuido interpretaciones geométricas y probabilísticas [18].

Actualmente existe una gran cantidad de operadores integrales y diferenciales de orden no entero, la mayoría de éstos tienen como finalidad generalizar a los operadores clásicos y probar los límites del cálculo de orden no entero. Baleanu y Fernández [20] consideran que existen dos intereses principales de este nuevo cálculo: explorar y definir nuevos operadores, desde un enfoque matemático y otro aplicado; o bien, generar un marco matemático formal y conocer sus límites. Debido a la diferencia entre enfoques, se ha

discutido considerablemente cómo clasificarlos, para ello, Ross [17] definió una serie de criterios que deben satisfacer los operadores para poder definirse como fraccionarios [19]:

- a. La derivada fraccionaria de una función analítica debe ser también analítica.
- b. Cuando el orden de la derivada es un igual a un número entero positivo, la derivada fraccionaria debe producir el mismo resultado que la derivada ordinaria.
- c. Cuando el orden de la derivada es entero negativo, la derivada fraccionaria debe producir el mismo resultado que la integral clásica.
- d. La derivada de orden cero de una función, debe ser la misma función.
- e. Debe ser un operador lineal.
- f. La propiedad del semi grupo debe satisfacerse (propiedad multiplicativa).

Más recientemente, Sales, et al. [19] modifican los criterios y proponen clasificar a los operadores en cuatro tipos, de acuerdo a su formulación y no a sus propiedades operacionales:

- **Operadores clásicos** (F_1). Incluye a los primeros operadores, que están definidos en términos de integrales y derivadas. Se pueden subdividir en los que provienen de la formulación de Riemann-Liouville (R-L), definida en términos de la derivada de una integral:

$${}^{RL}D_a^\alpha f(u) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{du^n} \int_a^u \frac{f(x)}{(u - x)^{\alpha - n + 1}} dx \quad (1.1)$$

donde f es una función continua definida en un intervalo $[a, b]$, $\alpha > 0$ es el orden fraccionario, n el entero más cercano a α y $\Gamma(n - \alpha)$ es la función Gamma, definida como $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$. La derivada de Riemann-Liouville es considerada como la generalización al plano complejo y orden fraccionario de la n-tupla de la integral definida.

Y aquellos que provienen del planteamiento de Caputo (Ec.(1.2)), definidos a partir de la integral de una derivada:

$${}^C D_a^\alpha f(u) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^u (x - u)^{n - \alpha - 1} \frac{d^n f(x)}{dx^n} dx, \quad x \leq a \quad (1.2)$$

La diferencia fundamental entre estos dos operadores radica en cómo deben definirse las condiciones iniciales o de frontera cuando se utilizan en ecuaciones diferenciales. Al utilizar la derivada de Caputo es posible emplear condiciones iniciales o

a la frontera de orden entero. Estos operadores han tenido aplicaciones en diversas áreas como: dinámica y control, viscoelasticidad, bioingeniería, procesamiento de señales, entre otras.

- **Operadores modificados (F_2):** Incluye a aquellos que son una modificación de los operadores clásicos y cuyo objetivo es generalizar o mejorar las características de los operadores F_1 . Algunos ejemplos de este tipo de derivadas son: Weyl, Marchaud, ψ -Hilfer, entre otras. Con la derivada de Marchaud (Ec.1.3) se ilustra con claridad que está basada en la formulación de R-L cuando $n=1$, y que la diferencia se encuentra en el núcleo de la integral y su límite inferior.

$$D_{-}^{\alpha} f(u) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^u \frac{f(u) - f(x)}{(u-x)^{1+\alpha}} dx \quad (1.3)$$

Estos operadores han tenido impacto en áreas como: mecánica, osciladores, funciones especiales y ecuaciones diferenciales.

- **Operadores locales (F_3):** Derivadas locales que incluyen un exponente fraccionario, su definición proviene del concepto del límite de una función y han sido consideradas como cambios de variable de las derivadas clásicas. Derivadas conformables, deformables, operador M, entre otros. Estos operadores han sido utilizados para aplicaciones de mecánica, turbulencia, difusión anómala, entre otras. La derivada de Katugampola es expresada como:

$$D^{\alpha} f(u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(ue^{\epsilon u^{-\alpha}}) - f(u)}{\epsilon} \quad (1.4)$$

donde f es una función continua cuyo límite existe.

- **Operadores con núcleo no singular (F_4):** Son formulaciones en las que no se presenta singularidad, debido a que los núcleos de las integrales están definidas en términos de funciones exponenciales o Mittag-Leffler. Un ejemplo de estos operadores es la derivada de Caputo-Fabrizio:

$$D^{\alpha} f(u) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^u f'(\tau) e^{-\frac{\alpha(u-\tau)}{1-\alpha}} d\tau \quad (1.5)$$

donde $M(\alpha)$ es una función de normalización que cumple $M(0) = 1 = M(1)$.

Generalmente las derivadas no locales (F_1, F_2, F_4) se emplean cuando se requiere describir efectos de memoria; mientras que las locales (F_3) han sido aplicados para mejorar la descripción de ciertos procesos, como: difusión anómala [21], análisis de circuitos [22], propagación de ondas [23], flujos no Darcianos [24], entre otros.

Las derivadas conformables son un tipo de operador local, que han adquirido reciente

popularidad y cuyo alcance sigue siendo explorado. En la siguiente sección se presenta la definición, características fundamentales, tipos y ejemplos de estas derivadas.

1.2. Derivadas Conformables

Khalil et al. [25] introdujeron el concepto de derivada conformable como respuesta a ciertas características operacionales que las derivadas fraccionarias clásicas fallan en reproducir y que este operador conformable puede satisfacer:

- a. $T_\alpha(c) = 0$, donde c es cualquier constante
- b. $T_\alpha(fg) = gT_\alpha(f) + fT_\alpha(g)$
- c. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$
- d. Regla de la cadena: si f es diferenciable, entonces $T_\alpha(f \circ g) = f'(g(u))T_\alpha g(u)$

donde T_α es la notación que eligieron en el trabajo original para representar al operador conformable.

La definición del operador para una función $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por [25]:

$$T_\alpha f(u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(u + \epsilon u^{1-\alpha}) - f(u)}{\epsilon} \quad (1.6)$$

para todo $u > 0$, $\alpha \in (0, 1)$. Si f es α -diferenciable en el intervalo $(0, a)$, $a > 0$ y el límite existe $\lim_{u \rightarrow 0} T_\alpha f(u)$, por lo que

$$T_\alpha f(0) = \lim_{u \rightarrow 0} T_\alpha f(u) \quad (1.7)$$

Está demostrado [25] que la derivada conformable satisface las siguientes propiedades:

- a. $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
- b. $T_\alpha(c) = 0$, para valores constantes.
- c. $T_\alpha(fg) = gT_\alpha(f) + fT_\alpha(g)$
- d. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$
- e. Si f es diferenciable, entonces $T_\alpha f(u) = u^{1-\alpha} \frac{df}{du}$
- f. si f es diferenciable, entonces $T_\alpha(f \circ g) = f'(g(u))T_\alpha g(u)$

Inicialmente este operador fue denominado derivada conformable fraccionaria, sin embargo, algunos autores han enfatizado que al ser local, no proporciona nueva información en el espacio de las funciones diferenciables y que las ecuaciones obtenidas con éste pueden ser descritas con ecuaciones diferenciales de orden entero [26]. Incluso si este operador no cumple con las características de una derivada fraccionaria, presenta ventajas para la descripción de ciertos fenómenos y en el manejo matemático de las ecuaciones diferenciales, por lo que resulta interesante analizar el impacto que tienen en la descripción de fenómenos físicos.

Con la finalidad de ilustrar su comportamiento, se presenta un ejemplo de este operador aplicado en la función $f = \sin(ax)$:

$$T^\alpha \sin(ax) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(ax + \epsilon x^{1-\alpha}) - \sin(ax)}{\epsilon}$$

$$T^\alpha \sin(ax) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) \cos(\epsilon x^{1-\alpha}) + \cos(ax) \sin(\epsilon x^{1-\alpha}) - \sin(ax)}{\epsilon}$$

$$T^\alpha \sin(ax) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\cos(\epsilon x^{1-\alpha}) - 1}{\epsilon} + \cos(ax) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\epsilon x^{1-\alpha})}{\epsilon}$$

$$T^\alpha \sin(ax) = ax^{1-\alpha} \cos(ax)$$

En la solución del ejemplo anterior se observa que al ser diferenciable, se cumple la propiedad: $T_\alpha f(u) = u^{1-\alpha} \frac{df}{du}$. Y que cuando $\alpha = 1$ se recupera la derivada clásica. Para continuar el análisis de la derivada se presenta una gráfica en la que el valor del exponente fraccionario toma diferentes valores. La Fig.1.1 muestra que mientras que el valor de α decrece, la amplitud de la función es mayor, y que cuando $\alpha \rightarrow 1$ la amplitud de la función disminuye, acercándose a los valores de la derivada de orden entero (línea verde). Mediante este análisis se muestra cómo la derivada conformable alcanza rangos más amplios a través del exponente fraccionario, es decir, para un mismo dominio se obtiene un rango de la derivada mayor que el modelo clásico, por lo que es posible que tenga mayor alcance para describir ciertos fenómenos físicos.

Incluso cuando la derivada de Khalil ha sido utilizada en múltiples investigaciones con interpretaciones físicas de interés; posterior a su definición se analizó que la función $u^{1-\alpha}$ puede ser generalizada, para tener mayor alcance y flexibilidad al describir fenómenos físicos, por lo tanto, se presentan las características de las derivadas generalizadas.

1.2.1. Derivadas conformables generalizadas

Con la finalidad de extender la definición de la derivada conformable, Zhao et al [27] definieron la *derivada conformable generalizada* (DCG), la cual considera que la función $u^{1-\alpha}$ empleada por Khalil, es una función específica que puede escribirse en términos más generales. Esto permite contar con una amplia gama de derivadas que puedan ajustarse

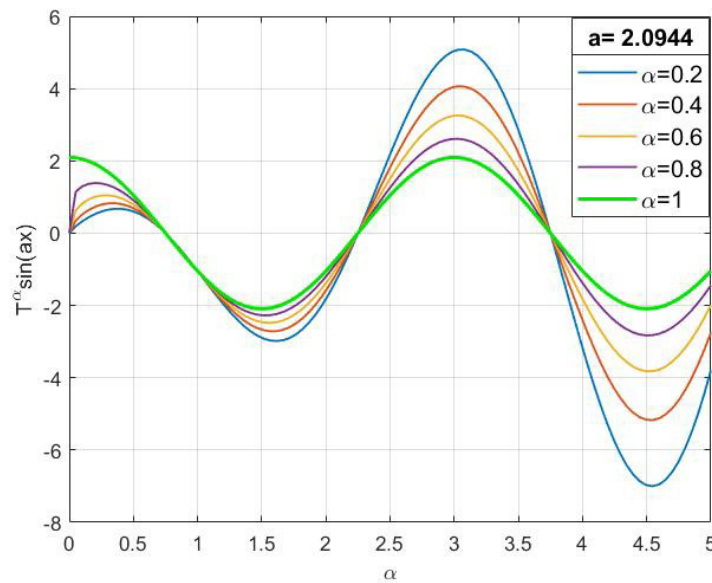


Figura 1.1: Derivada conformable de $f(x) = \text{Sin}(ax)$ como función de α

a los fenómenos que se pretendan describir.

Los autores consideran que una derivada conformable generalizada:

- Debe reducirse a la derivada de orden entero cuando $\alpha = 1$.
- Debe ser consistente con las propiedades de la derivada clásica.
- Debe tener una interpretación física o geométrica.

Se propone a la forma extendida de la diferencial de Gâteaux (DGE), una generalización de la derivada direccional [28], como precursora de la derivada conformable generalizada [27]. Primero se describe a la derivada de Gâteaux, considerando que X y Y son espacios vectoriales localmente convexos, $U \subset X$ un conjunto abierto, $f: X \rightarrow Y$ y $df(u; \psi)$ de f en $u \in X$ está definida como:

$$df(u; \psi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(u + \epsilon\psi) - f(u)}{\epsilon} \quad (1.8)$$

La función f es Gâteaux-diferenciable en u si el límite de la Ec.(1.8) existe para todo $\psi \in X$.

Para mayor información sobre sus características y propiedades puede consultarse: [28]. La forma extendida de la diferencial considera que X y Y son espacios vectoriales localmente convexos $U \subset X$ un conjunto abierto, $f: X \rightarrow Y$, $\psi(u, \epsilon, p): X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow X$, donde p y ϵ son parámetros. La DGE $df(u; \psi)$ de f en $u \in X$ está definida como:

$$df^{EG}(u; \psi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(u + \psi(u, \epsilon, p)) - f(u)}{\epsilon} \quad (1.9)$$

La diferencia entre las Ecs.(1.8 y 1.9) es la función ψ . Para la primera, funciona como parámetro, mientras que en la extendida, es una función de tres variables.

Con base en la Ec.(1.9), es posible definir a la derivada conformable generalizada de una función $f(u) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y la función $\psi(u, \alpha) : (0, \infty) \times \mathbb{R}$ para todo $u > 0$, de orden α para $\alpha \in (0, 1]$, como:

$$D_{\psi}^{\alpha} f(u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(u + \epsilon \psi(u, \alpha)) - f(u)}{\epsilon} \quad (1.10)$$

donde $\psi(u, \alpha)$ es una función generalizada que debe satisfacer:

$$\psi(u, 1) = 1, \quad u \in \mathbb{R}^+ \quad (1.11)$$

$$\psi(u, \alpha) = 0, \quad u \in \mathbb{R}^+ \quad (1.12)$$

$$\psi(u, \alpha) = \psi(u, \beta), \quad \alpha = \beta \in (0, 1] \quad (1.13)$$

Cuando $\psi(u, \alpha) = u^{1-\alpha}$ se recupera la derivada conformable definida por Khalil.

En el trabajo de Zhao et al. [27] se presentan algunas funciones que satisfacen las características mencionadas, por ejemplo:

función lineal: $\psi(u, \alpha) = ak + b$, donde k, b son constantes

función exponencial: $\psi(u, \alpha) = a^{(1-\alpha)h(\alpha)}$, donde $h(p)$ es una función polinomial.

función trigonométrica: $\psi(u, \alpha) = \sin_{\frac{\pi}{2}}(\alpha)$

Considerando que $\alpha \in (0, 1)$ y f, g son funciones α -diferenciables, entonces se satisface:

a. $D_{\psi}^{\alpha}(af + bg) = aD_{\psi}^{\alpha}f + bD_{\psi}^{\alpha}g$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

b. $D_{\psi}^{\alpha}(c) = 0$, para cualquier constante.

c. $D_{\psi}^{\alpha}(fg) = gD_{\psi}^{\alpha}(f) + fD_{\psi}^{\alpha}(g)$

d. $D_{\psi}^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD_{\psi}^{\alpha}(f) - fD_{\psi}^{\alpha}(g)}{g^2}$

e. Si f es diferenciable, entonces $D_{\psi}^{\alpha}f(u) = \psi(u, \alpha) \frac{df}{du}$

f. Si f es diferenciable $D_{\psi}^{\alpha}(f \circ g) = f'(g(u))D_{\psi}^{\alpha}g(u)$

Existen múltiples funciones que pueden satisfacer las características anteriores, por lo que es importante analizar alguna familia que resulte útil para describir procesos deseados, analizar sus parámetros y elegir las adecuadas para el fenómeno de interés. Por lo que

en la siguiente sección se presentan ejemplos en los que se analiza el comportamiento del parámetro fraccionario.

1.2.2. Funciones de la derivada conformable generalizada

Con la finalidad de analizar el comportamiento de $\psi(u, \alpha)$ y su impacto en la derivada conformable, se seleccionan una familia de funciones exponenciales y potenciales, las cuales cumplen con las características descritas en (1.11,1.12,1.13).

- $\psi_1(u, \alpha) = u^{1-\alpha}$
- $\psi_2(u, \alpha) = \exp(1+u)(1-\alpha)$
- $\psi_3(u, \alpha) = a^{(1+u)(1-\alpha)}$
- $\psi_4(u, \alpha) = u^{(1-\alpha)} \exp(\alpha)$
- $\psi_5(u, \alpha) = u^{(1-\alpha)(\alpha^2+\alpha^3)}$

Donde la función ψ_1 corresponde a la definición de Khalil, la cual es incluida para compararla con otro tipo de funciones.

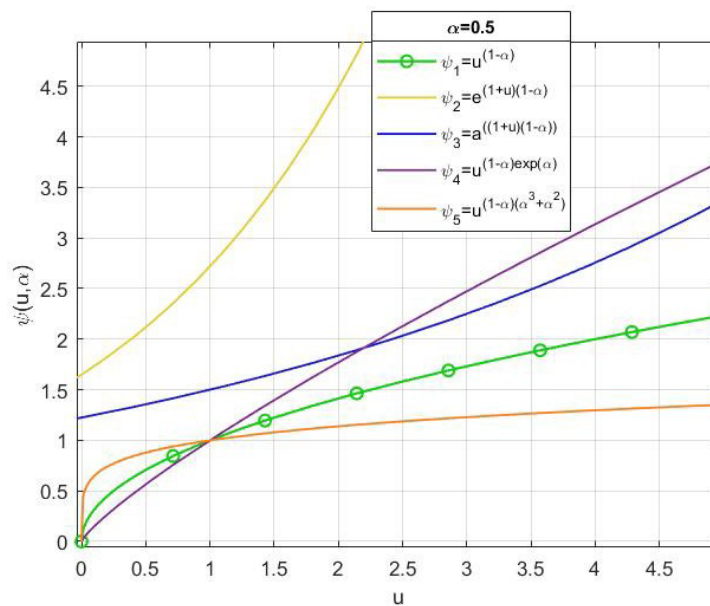


Figura 1.2: Funciones $\psi(u, \alpha)$ para $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de u

Esta comparación se presenta en la Fig.1.2, en la cual se muestra el comportamiento de las funciones a un valor fijo del parámetro fraccionario α , en ella se observa que las funciones exponenciales alcanzan rangos distintos a las potenciales. Esta información

posiblemente puede ser útil al momento de la elección de la función en la derivada. Por otro lado, en la Fig.1.3 se muestra cómo cambia la función respecto a sus dos variables independientes, en la que se observa nuevamente que el exponente fraccionario impacta el rango de la función.

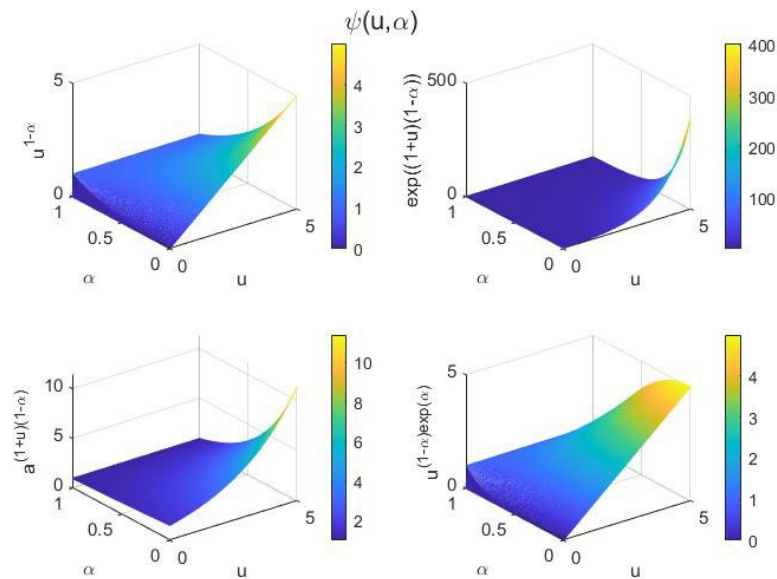


Figura 1.3: Funciones $\psi(u, \alpha)$

Posterior a analizar el comportamiento de las funciones $\psi(u, \alpha)$, éstas se incluyen en la derivada conformable para observar su comportamiento comparado con la derivada clásica. Para ello, se eligen dos funciones continuas simples: una función trigonométrica y una potencial. La primera se muestra en la Fig.1.4 (a), en la que resalta que la función exponencial presenta mayor amplitud que el resto de las funciones, siendo la función $\psi_3(u, \alpha)$ la que se acerca más a la derivada clásica. Con respecto a la Fig.1.4 (b) la función a derivar es $f(u) = x^3$, en la que nuevamente resalta la función exponencial como la más alejada del comportamiento clásico. En ambas gráficas se representa a la derivada de Khalil con marcadores verdes y un valor fijo para el exponente fraccionario $\alpha = 0.5$.

Una vez presentadas las diferencias evidentes entre las derivadas conformables respecto a la clásica, y observar que existe un comportamiento distinto, se presenta otra forma de generalizar a los operadores conformables y ampliar su aplicación. Concretamente se desarrolla el marco multivariable de las derivadas generalizadas, el cual también fue definido por Zhao y colaboradores [27], y con la cual es posible definir operadores diferenciales parciales conformables y modelos matemáticos con más de dos variables independientes.

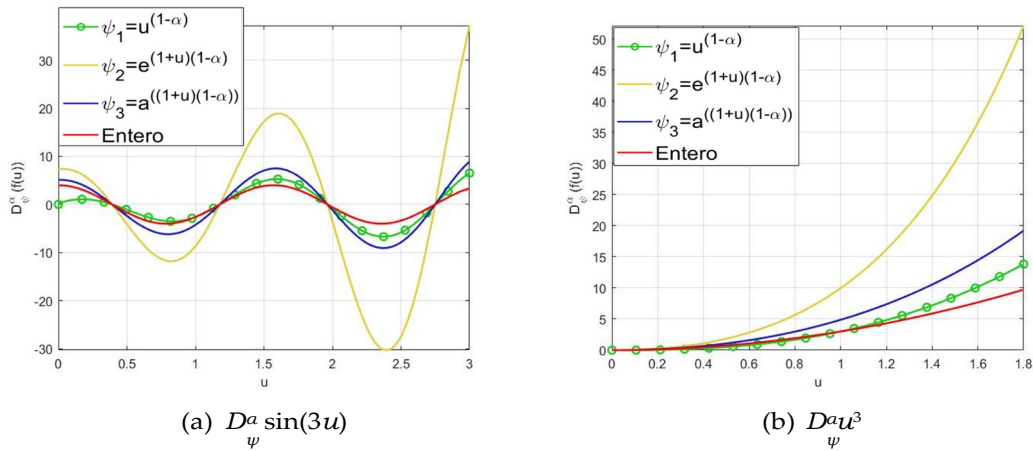


Figura 1.4: Derivadas conformables con diferentes funciones ψ

1.2.3. Marco multivariable de los operadores conformables

En los trabajos de Zhao et al. [27],[21] se introduce el marco multivariable de la derivada conformable a través de la forma lineal extendida de la diferencial de Gâteaux (LEG), considerando X, Y espacios vectoriales locales convexos, $U \subset X$ es abierto, $f: X \rightarrow Y$ y $\psi(u, \alpha): X \times \mathbb{R} \rightarrow X$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro

$$df^{LEG}(u; \psi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(u + \epsilon \psi(u, \alpha)) - f(u)}{\epsilon} \quad (1.14)$$

si el límite existe.

En el caso de que los espacios X, Y sean Euclidianos en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente, y $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U \subset X$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in Y$, $\psi(u, p): X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ y α es un parámetro. Se considera que $\partial f_j / \partial u_i, \forall i \in 1, 2, \dots, n, \forall j \in 1, 2, \dots, m$, proponen y demuestran [27] que:

$$df^{LEG}(u; \psi) = (\langle \nabla f_1, \psi(u, p) \rangle, \langle \nabla f_2, \psi(u, p) \rangle, \dots, \langle \nabla f_m, \psi(u, p) \rangle) \quad (1.15)$$

Cuando $m = 1$ y $\psi(u, p) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, la Ec.(1.15) coincide con la definición de la derivada parcial de f . Cuando $m = 1$ la interpretación geométrica de la Ec.(1.15) puede definirse como la proyección de la función $\psi(u, p)$ en el gradiente.

En términos de la derivada conformable, se define a la derivada generalizada conformable de orden n , donde $\alpha \in (n, n + 1]$ para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ y f una función n -diferenciable para $u > 0$:

$$D_{\psi}^{\alpha} f(u) = D_{\psi}^{\alpha-n} D^n f(u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f^n(u + \epsilon \psi(u, \alpha)) - f^n(u)}{\epsilon} \quad (1.16)$$

Si el límite existe.

A partir de las ecuaciones previas, se define a una derivada parcial conformable ($P_i^{\alpha, \psi}$) considerando que $\psi_i(u_i, \alpha_i)$, $\alpha_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$ representa a las funciones conformables, que por conveniencia α representa a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ y ψ representa a todas las ψ_i . Que los espacios X, Y sean Euclidianos \mathbf{R}^n y \mathbf{R}^m respectivamente:

$$P_i^{\alpha, \psi} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(u + \epsilon(0, \dots, \psi_i(u_i, \alpha_i), \dots, 0))(u) - f(u)}{\epsilon} \quad (1.17)$$

Conociendo una derivada parcial espacial, es posible definir al operador Nabla Conformable como:

$$\nabla^{\alpha, \psi} = (P_1^{\alpha, \psi}, P_2^{\alpha, \psi}, \dots, P_n^{\alpha, \psi}) \quad (1.18)$$

Donde $P_i^{\alpha, \psi}$ representa la derivada parcial conformable respecto a la función u .

Los operadores espaciales son de gran utilidad en el análisis de variables que muestran cambios a través del espacio, como la velocidad, la temperatura, entre otras. Por ello, es importante definir las operaciones clásicas con el operador Nabla. La primera operación descrita en un espacio Euclidianos es el Gradiente, el cual puede escribirse para una función $f: X \rightarrow Y$, en la que $\psi(u, \alpha) = (\psi_1(u_1, \alpha_1), \psi_2(u_2, \alpha_2), \dots, \psi_n(u_n, \alpha_n))$, donde $\psi_i(u_i, \alpha_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ representa a las funciones conformables:

$$\text{Grad}^{\alpha, \psi} F = \nabla^{\alpha, \psi} f \quad (1.19)$$

En segundo lugar se presenta a la divergencia, en la que se considera que $\psi(u, \alpha) = (\psi_1(u_1, \alpha_1), \psi_2(u_2, \alpha_2), \dots, \psi_n(u_n, \alpha_n))$, donde $\psi_i(u_i, \alpha_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ representa a las funciones conformables, y $F = (F_1(u), F_2(u), \dots, F_n(u))$ representa al campo vectorial en X :

$$\text{Div}^{\alpha, \psi} F = \nabla^{\alpha, \psi} \cdot F \quad (1.20)$$

Por último, el rotacional, el cual está definido por:

$$\text{Curl}^{\alpha, \psi} F = \nabla^{\alpha, \psi} \times F \quad (1.21)$$

Con el desarrollo de estas operaciones es posible considerar que los operadores conformables tienen un marco definido en términos de las variables espaciales, por lo que es indispensable analizar su alcance al emplearlos. Previo a este trabajo, las investigaciones reportadas se han enfocado mayormente en la variable temporal, existiendo una oportunidad para abrir el paso al análisis de variables espaciales.

Las ecuaciones de Navier-Stokes (N-S) se han analizado ampliamente con operadores de orden no entero en la variable temporal [29–32], sin embargo existen pocos estudios que involucren una derivada de orden no entero espacial enfocados en dar interpretación física al modelo fraccionario [12, 14, 33, 34], y muchos menos trabajos con derivadas conformables espaciales con aplicaciones, los encontrados se enfocan principalmente en métodos de solución de la ecuación diferencial, como en el desarrollado por Zhao y colaboradores [35]. Es por ello que este trabajo se enfoca en dar una aplicación a los modelos conformables espaciales, inicialmente abordando las características de los modelos de flujo clásico para posteriormente analizar el modelo con el operador de orden no entero.

1.3. Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes (N-S) son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales y no lineales que describen el movimiento de los fluidos Newtonianos a través de un balance de momentum macroscópico a un volumen de control [36]. Éstas representan un modelo determinista que describe cómo es el cambio total del momentum para un fluido newtoniano, debido a las fuerzas internas y a la gravedad [37] que puede escribirse como:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \quad (1.22)$$

en donde $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ representa al vector velocidad del fluido, $P = P(\mathbf{x}, t)$ a la presión, μ la viscosidad y \mathbf{g} a la fuerza de gravedad, mientras que ∇ es el operador Nabla que representa los cambios en el espacio.

En términos matemáticos, el objetivo de estudiar estas ecuaciones es obtener las propiedades de las soluciones $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y $P(\mathbf{x}, t)$, como existencia, unicidad, regularidad y el comportamiento asintótico en el espacio y en el tiempo [38]; manteniéndose como un problema abierto y considerado uno de los problemas del milenio [39]. Por otro lado, en el área ingenieril es importante caracterizar el flujo de un fluido, ya sea a través de soluciones analíticas de modelos simplificados, simulaciones o para definir propiedades del fluido.

En el caso de las soluciones analíticas, que permiten sentar las bases para validar simulaciones, se requiere a detalle una geometría específica a través de la cual se mueve el

fluido. Por ejemplo, considerando el sistema coordenado cartesiano (x, y, z) , donde los componentes de la velocidad están dados por v_x, v_y, v_z , tal que $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$, las Ecs.1.22 toman la forma [40]:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \overset{\mathbf{A}}{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \overset{\mathbf{B}}{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}} + \rho g_x \quad (1.23)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \overset{\mathbf{A}}{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \overset{\mathbf{B}}{\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}} + \rho g_y \quad (1.24)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \overset{\mathbf{A}}{\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \overset{\mathbf{B}}{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}} + \rho g_z \quad (1.25)$$

Esta forma de expresar las ecuaciones resulta útil al analizar un sistema de flujo específico y se emplean para describir el movimiento de fluidos como agua y aire en diferentes áreas de la ciencia. Al extraer los fenómenos básicos de la física del sistema, se simplifican las ecuaciones diferenciales y se tiene la posibilidad de obtener soluciones exactas (funciones explícitas). En este caso, los modelos simplificados representan prototipos de flujo o primeras aproximaciones para flujos más generales, así como casos límite para probar los modelos computacionales [37]. Es por ello que elegir un modelo simplificado de N-S permite analizar el impacto matemático y físico de los operadores de orden no entero.

En la siguiente sección se define uno de los modelos fundamentales para un flujo viscoso completamente desarrollado en el estudio del movimiento de fluidos, el flujo planar de Poiseuille [41], el cual representa al flujo de un fluido a través de dos placas paralelas, éste presenta una solución analítica ampliamente estudiada [40, 42, 43]. Un modelo como este permite analizar con detalle las implicaciones de nuevos operadores y tipos de fluidos.

1.3.1. Modelo simplificado de N-S (clásico) y su solución

En esta sección se describe al flujo entre dos placas paralelas fijas, también conocido como el flujo planar de Poiseuille. Este considera a un fluido newtoniano incompresible fluyendo en régimen permanente, a través de dos placas paralelas horizontales y fijas separadas por una distancia h (Fig. 1.5).

Para obtener a las ecuaciones que lo representan, se toman en cuenta las siguientes consideraciones: régimen permanente, flujo completamente desarrollado (la velocidad no cambia en la dirección del movimiento), con vector velocidad definido por $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$,

el movimiento se debe a un gradiente de presión constante y las fuerzas externas (gravedad) son despreciables en el eje de movimiento, debido al contacto con las paredes fijas, existe un gradiente de velocidad en el eje y . El dominio del sistema propuesto está definido por $R = (-\infty, \infty) \times [0, h] \in \mathbb{R}^2$ y se consideran condiciones de frontera de no deslizamiento en las paredes sólidas $v_x(x, 0) = 0$, $v_x(x, h) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v_x(x, y) = 0$.

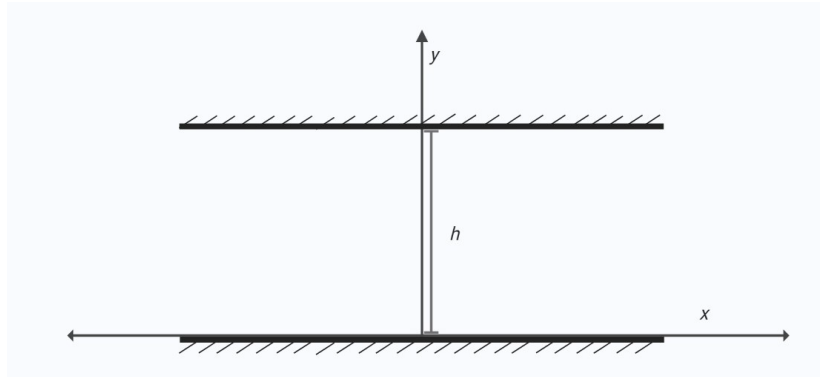


Figura 1.5: Representación del dominio de flujo

Con base en las consideraciones anteriores, las ecuaciones de N-S en el sistema coordenado cartesiano (1.23-1.25), se reducen a una ecuación diferencial ordinaria:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}. \quad (1.26)$$

$$0 = \frac{\partial P}{\partial y} - \rho g_y \quad (1.27)$$

La Ec.1.26 representa al movimiento del fluido debido al gradiente de presión, mientras que el componente y, z no se incluyen en el sistema porque no hay movimiento en esos ejes. Esta ecuación tiene solución analítica en la que se considera a las condiciones de frontera de no deslizamiento, la cual toma la forma:

$$v_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (y^2 - hy). \quad (1.28)$$

Este perfil de velocidad indica cómo es la velocidad en cada punto del espacio, definiendo que el fluido se mueve de forma parabólica a través de las placas, donde la máxima velocidad se encuentra en el centro del sistema coordenado $y = h/2$, mientras que en las paredes el fluido se adhiere no hay movimiento. El valor de la máxima velocidad cambia de acuerdo al gradiente de velocidad aplicado y a la viscosidad del fluido.

Una de las formas que se tiene para comprobar que esta solución representa realmente al movimiento del fluido es a través del cálculo de una propiedad macroscópica medible,

denominada flujo volumétrico. El cual se obtiene integrando el perfil de velocidad en el área a través de la cual pasa el fluido y que para este modelo se expresa, por unidad de longitud del canal [m^2/s], como:

$$Q = \frac{1}{12 \mu} \frac{dP}{dx} h^3. \quad (1.29)$$

Una vez descrito el modelo clásico simplificado y obtenido el perfil de velocidad y el flujo volumétrico, se tiene el caso límite con el cual se comparará a los modelos con derivadas conformables, a los cuales se hará referencia con el nombre de **Modelos Conformables**.

Capítulo 2

Derivadas Conformables Generalizadas en las Ecuaciones de Navier- Stokes

En esta sección se incluye una propuesta para formular un modelo generalizado conformable de N-S, la definición de dos nuevas funciones conformables y su introducción a un modelo simplificado de N-S, las respectivas soluciones de los modelos simplificados conformables y una comparación entre los perfiles de velocidad con el modelo clásico de orden entero.

2.1. Modelo generalizado de N-S incluyendo el marco multivariable de las derivadas conformables

Una de las primeras aportaciones de este trabajo es presentar un modelo generalizado de las ecuaciones N-S empleando el marco multivariable de los operadores conformables (Sec.1.2.3) en las ecuaciones de N-S. En la Ec.(2.1) se presenta una propuesta matemática generalizada, en la que todos los operadores diferenciables están definidos a través de derivadas conformables definidas en el marco multivariable. Las derivadas parciales conformables presentan la posibilidad de incluir diferentes valores del exponente fraccionario, por lo que se decide incluirla a través de diversas letras griegas en los operadores ∇ y en la derivada temporal, con este formato se da la posibilidad de incluir distintos valores para cada derivada. Este planteamiento implica que el tensor de esfuerzos incluya a la derivada conformable en el término de gradiente de velocidad, este tratamiento se ha

realizado ya con derivadas fraccionarias para generalizar la descripción del esfuerzo [14], por lo que se esperaríia que el operador conformable extienda la relación entre esfuerzo y deformación, sin alterar la linealidad del modelo.

$$\rho \psi(\alpha, t) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla^{\beta, \psi} \mathbf{v} = -\nabla^{\gamma, \psi} P + \nabla^{\eta, \psi} \cdot (\mu \nabla^{\eta, \psi} \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \quad (2.1)$$

en donde β representa a $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, γ incluye a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, δ a $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ y η a η_1, η_2, η_3 . Se incluye al operador nabla conformable definido en la Ec.(1.18).

Con la finalidad de comparar con los componentes de la forma clásica de N-S, se escribe la forma desarrollada de la Ec. (2.1), considerando un sistema generalizado con coordenadas x_1, x_2, x_3 , velocidad $v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3), v_3(x_1, x_2, x_3)$ y un fluido con viscosidad isotrópica.

$$\begin{aligned} & \left(\rho \psi(\alpha, t) \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \psi_1(x_1, \beta_1) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \psi_2(x_2, \beta_2) \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \psi_3(x_3, \beta_3) \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \\ & \psi_1(x_1, \gamma_1) \frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu \psi_1(x_1, \eta_1) \psi_1(x_1, \eta_1) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1(x_1, \eta_1)}{\partial x_1} + \\ & \mu \psi_2(x_2, \eta_2) \psi_2(x_2, \eta_2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_2(x_2, \eta_2)}{\partial x_2} + \\ & \mu \psi_3(x_3, \eta_3) \psi_3(x_3, \eta_3) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_3(x_3, \eta_3)}{\partial x_3} + \rho g_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \left(\rho \psi(\alpha, t) \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \psi_1(x_1, \beta_1) \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \psi_2(x_2, \beta_2) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \psi_3(x_3, \beta_3) \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) = \\ & \psi_2(x_2, \gamma_2) \frac{\partial P}{\partial x_2} + \mu \psi_1(x_1, \eta_1) \psi_1(x_1, \eta_1) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1(x_1, \eta_1)}{\partial x_1} + \\ & \mu \psi_2(x_2, \eta_2) \psi_2(x_2, \eta_2) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_2(x_2, \eta_2)}{\partial x_2} + \\ & \mu \psi_3(x_3, \eta_3) \psi_3(x_3, \eta_3) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_3(x_3, \eta_3)}{\partial x_3} + \rho g_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\rho \psi(\alpha, t) \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_2 \psi_1(x_1, \beta_1) \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \psi_2(x_2, \beta_2) \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \psi_3(x_3, \beta_3) \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = \\
& \psi_3(x_3, \gamma_3) \frac{\partial P}{\partial x_3} + \mu \psi_1(x_1, \eta_1) \psi_1(x_1, \eta_1) \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1(x_1, \eta_1)}{\partial x_1} + \\
& \mu \psi_2(x_2, \eta_2) \psi_2(x_2, \eta_2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_2(x_2, \eta_2)}{\partial x_2} + \\
& \mu \psi_3(x_3, \eta_3) \psi_3(x_3, \eta_3) \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_3(x_3, \eta_3)}{\partial x_3} + \rho g^3
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Las ecuaciones (2.2)-(2.4) son análogas a los componentes de las ecuaciones de N-S mostradas en las Ecs.(1.23)-(1.25). En la forma generalizada se encuentran mucho más términos que en el modelo clásico, los cuales provienen de la regla del producto y de la cadena. Cuando todos los exponentes fraccionarios son iguales a uno, se recupera la forma clásica.

Las Ecs.(2.2)-(2.4) representan la forma más general cuando se incluye a operados conformables con distintas funciones y distintos exponentes en cada derivada, representando la posibilidades que pueden alcanzarse si se consideran las propiedades del marco multivariable conformable definido en la Sec.1.2.3. Para iniciar el análisis se toma un caso particular en donde todas las derivadas conformables estén definidas con la misma función, para posteriormente definir un modelo simplificado a resolver.

2.1.1. Modelo generalizado N-S con derivadas de Khalil

Para ejemplificar un caso particular de la forma generalizada de N-S se plantea que todas las derivadas conformables estén definidas por la derivada de Khalil [25] en un sistema coordinado generalizado. Esto significa que todos los exponentes fraccionarios puedan están representados por α_i , el cual puede ser distinto para cada derivada, y las funciones conformables se representen como $\psi(\alpha_i, x_i) = x_i^{1-\alpha_i}$. La forma que adquieren las Ecs.(2.2)-(2.4) es:

$$\begin{aligned}
\rho t^{1-\beta} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 x_1^{1-\alpha_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 x_2^{1-\alpha_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 x_3^{1-\alpha_3} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} &= -x_1^{1-\alpha_1} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \\
x_1^{2(1-\alpha_1)} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + (1-\alpha_1) x_1^{-1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + x_2^{2(1-\alpha_2)} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + (1-\alpha_2) x_2^{-1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \\
x_3^{2(1-\alpha_3)} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + (1-\alpha_3) x_3^{-1} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \rho g^1 &
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
\rho t^{1-\beta} \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 x_1^{1-\alpha_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 x_2^{1-\alpha_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 x_3^{1-\alpha_3} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} &= -x_2^{1-\alpha_2} \frac{\partial P}{\partial x_2} + \\
x_1^{2(1-\alpha_1)} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + (1-\alpha_1) x_1^{-1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + x_2^{2(1-\alpha_2)} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + (1-\alpha_2) x_2^{-1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \\
x_3^{2(1-\alpha_3)} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} + (1-\alpha_3) x_3^{-1} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \rho g^2 &
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
\rho t^{1-\beta} \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 x_1^{1-\alpha_1} \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 x_2^{1-\alpha_2} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 x_3^{1-\alpha_3} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= -x_3^{1-\alpha_3} \frac{\partial P}{\partial x_3} + \\
x_1^{2(1-\alpha_1)} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + (1-\alpha_1) x_1^{-1} \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + x_2^{2(1-\alpha_2)} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + (1-\alpha_2) x_2^{-1} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \\
x_3^{2(1-\alpha_3)} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} + (1-\alpha_3) x_3^{-1} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \rho g^3 &
\end{aligned} \tag{2.7}$$

A diferencia del modelo completamente generalizado, este ya representa un caso particular utilizando un tipo de función conformable, lo cual lo hace más accesible a una aplicación específica, o bien, para definir un tipo de flujo particular. Con la finalidad de encontrar un modelo que pueda presentar solución analítica, se hacen simplificaciones para obtener un modelo 1D en régimen permanente.

2.1.2. Modelo simplificado con derivada de Khalil a partir de las ecuaciones generalizadas N-S

Para representar al flujo planar de Poiseuille con una derivada espacial de Khalil, puede simplificarse el modelo generalizado de Khalil, descrito en las Ecs.(refeq:NSKx)-(2.7).

Incluyendo todas las consideraciones definidas en la Sec.1.3.1 (régimen permanente, flujo completamente desarrollado, proceso difusivo unidireccional), al mismo tiempo que $\alpha_1 = 1$ para que las derivadas del componente x_1 sean de orden entero (particularmente el gradiente de presión para que pueda ser una propiedad medible y constante), la forma de las ecuaciones queda simplificada como:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + x_2^{2(1-\alpha_2)} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + (1 - \alpha_2) x_2^{(1-\alpha_2)} \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \quad (2.8)$$

donde v_1 representa al componente de la velocidad en x , mientras que x_2 al eje y .

La Ec.(2.8) sigue siendo ordinaria, de segundo orden y lineal, si se considera que el gradiente de presión es una constante ($\partial P/\partial x_1 = \frac{dP}{dx}$), presenta solución general analítica de la forma:

$$v_1 = -\frac{1}{2\alpha_2} \frac{dP}{dx} x_2^{2\alpha_2} + C_1 x_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2}} + C_2. \quad (2.9)$$

En esta solución general se requiere conocer el sistema y sus condiciones de frontera específicas, así como resaltar que el exponente fraccionario está definido en $0 < \alpha \leq 1$.

El ejercicio de la derivada conocida de Khalil es importante para ejemplificar la forma que adquieren los modelos y visualizar los desafíos matemáticos que conllevan, así como para vislumbrar posibles métodos de solución. Sin embargo, una de las aportaciones de este trabajo es identificar nuevas funciones para las derivadas conformables que sean útiles en describir fenómenos físicos, por lo que se plantea un análisis para las funciones de las derivadas conformables y nuevas propuestas (adicionales a la de Khalil) que puedan emplearse para describir procesos de flujo de fluidos. Por lo que en la siguiente sección se explorará a estas funciones conformables, con la finalidad de seleccionar algunas capaces de extender la teoría hasta ahora identificada y de reproducir fenómenos de interés.

2.2. Selección de nuevas funciones en las derivadas conformables

Para empezar, es necesario enfatizar que las derivadas conformables generalizadas pueden incluir diferentes familias de funciones que cumplan con las características mencionadas en la Sección 1.2, es por ello que se ha realizado una selección de éstas que pueda resultar útil para modelar el flujo de fluidos.

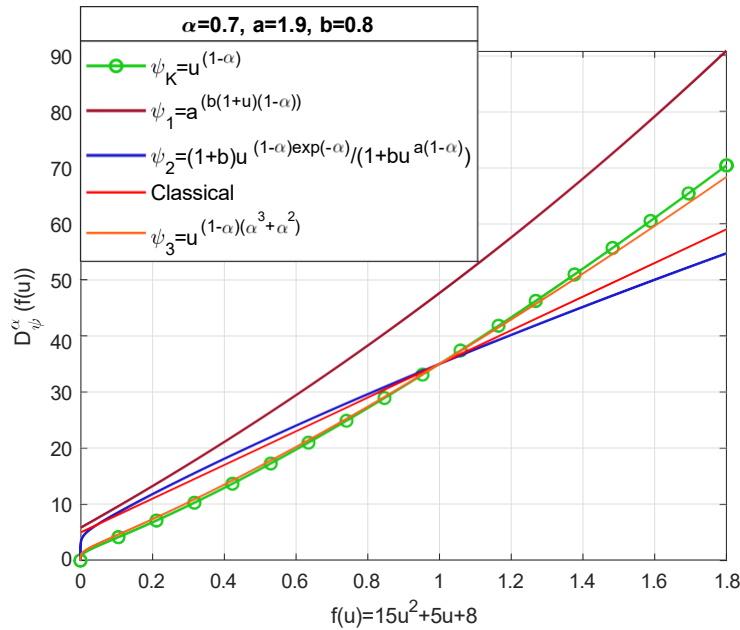


Figura 2.1: Derivadas conformables de la función $f(u) = 15u^2 + 5u + 8$

Para realizar el análisis de las funciones de la derivada conformable se tomaron como base a las mostradas en los ejemplos de la Sec.1.2.2, incluyendo también a algunas trigonométricas y logarítmicas. La mayoría de las funciones seleccionadas se inspiraron en Khalil y las presentadas en el trabajo de Zhao y Lao [27], con la finalidad de tener un punto de partida verificado. Posteriormente, para analizarlas, se elige una función que resulte familiar a los perfiles de velocidad clásicos, se aplican las derivadas y se observan los resultados. Particularmente, en este trabajo, se toma una función parabólica que simule el perfil de velocidad en tuberías, a la cual se le aplica el operador conformable, analizando su comportamiento y cómo modifica a la función.

Se analiza que las funciones que cuentan con dos parámetros adicionales (a , b) al exponente fraccionario α , son capaces de modular con mayor detalle y dar mayor alcance a las nuevas propuestas. En la Fig. 2.1 se presentan las derivadas con valores fijos de los parámetros a , b , en la que también se incluye a la derivada de Khalil (línea verde con marcadores circulares) y la derivada clásica (línea roja), como referentes en el análisis de las funciones seleccionadas. En concreto, se observa que $\psi_1 = a^{(b(1+u)(1-\alpha))}$ abarca mayor rango que el resto de las funciones, mientras que el comportamiento de la $\psi_2 = (1+b)u^{(1-\alpha)\exp(-\alpha)} / (1+bu^{a(1-\alpha)})$ se encuentra entre las funciones de Khalil y la derivada clásica. Por otro lado, la función $\psi_3 = u^{(1-\alpha)(\alpha^3 + \alpha^2)}$ presenta un comportamiento muy similar a la derivada de Khalil, la cual ha sido ampliamente utilizada y por lo cual es preferible descartarla del análisis, con la finalidad abarcar distintos procesos físicos.

Las propuestas que incluyen funciones trigonométricas y logarítmicas fueron descartadas debido a que no proporcionaron mayor rango de aplicación y porque al hacer pruebas en las ecuaciones diferenciales, mostraron ciertas dificultades para acceder a soluciones analíticas.

Por lo tanto, con base en el análisis de la Fig.2.1 y las pruebas preliminares en la ecuación diferencial, se opta por elegir a las funciones ψ_1 y ψ_2 como nuevas propuestas para derivadas conformables a emplear, por lo que se dan más detalles en los siguientes secciones. Posterior a la elección de las funciones ψ_1 y ψ_2 se decide incluir a una tercera función (ψ_3), la cual fue definida con base en los resultados de los modelos previos y su forma está inspirada en una propiedad física de los medios porosos (Sec. 4.2).

2.2.1. Función conformable ψ_1 y su derivada

La primera función elegida es:

$$\psi_1(u, \alpha) = a^{(1-\alpha)b(1+u)}, \quad (2.10)$$

la cual es exponencial, $\psi_1 : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y cuyos parámetros son $a, b \in \mathbb{R}^+$. Esta función es adimensional, considerando que los parámetros a, α también son adimensionales, mientras que b tiene dimensiones de $1/L$, siendo L la representación de la dimensión espacial o longitud, en caso de que la derivada sea espacial. Estas características le otorgan ventajas respecto a la función de Khalil, ya que es posible incluirla en la ecuación diferencial sin alteraciones a su dimensionalidad, es decir, no es necesario incluir parámetros adicionales para la consistencia adimensional como se ha realizado en otros trabajos previos con la derivada de Khalil [44].

Una vez realizado el análisis dimensional, sigue conocer con mayor detalle el impacto de los parámetros de ψ_1 en la función parabólica, para ello se presentan las Figs.2.2-2.4, en las que se muestra a la derivada como función de la variable independiente para diferentes valores de los parámetros. Primero se analiza el impacto de α manteniendo fijos los valores de $a = 0.1$ y $b = 1.5$ (Fig.2.2), observando que conforme $\alpha \rightarrow 1$ la función se va acercando al comportamiento clásico y , que mientras $\alpha \rightarrow 0$ el rango de la derivada disminuye. Posteriormente, en la Fig.2.3 se analiza la variación de b al mantener fijas $a = 0.1$ y $\alpha = 0.5$, en ésta se observa que el rango de la derivada aumenta cuando b disminuye, y finalmente, al mantener constantes los valores de $\alpha = 0.5$ y $b = 1.5$, se

analiza la variación de a en el comportamiento de la derivada, la cual alcanza valores más altos conforme a aumenta.

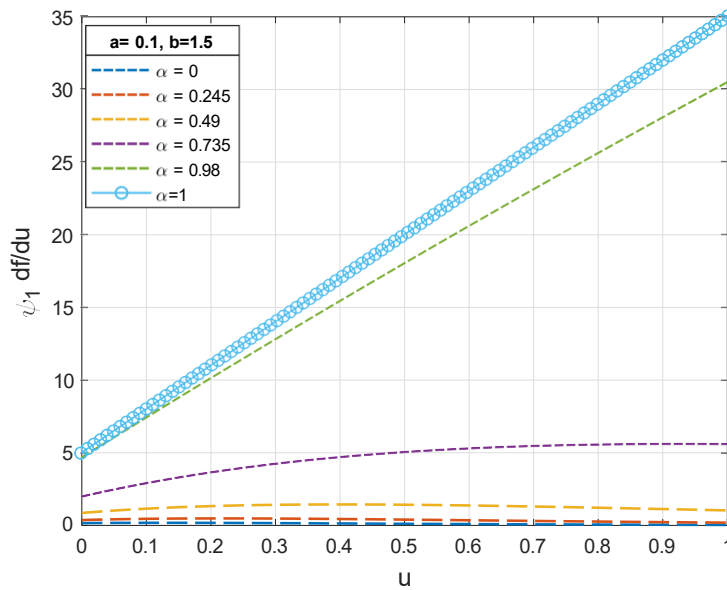


Figura 2.2: Análisis de la derivada conformable cuando $\psi_1(u, \alpha)$

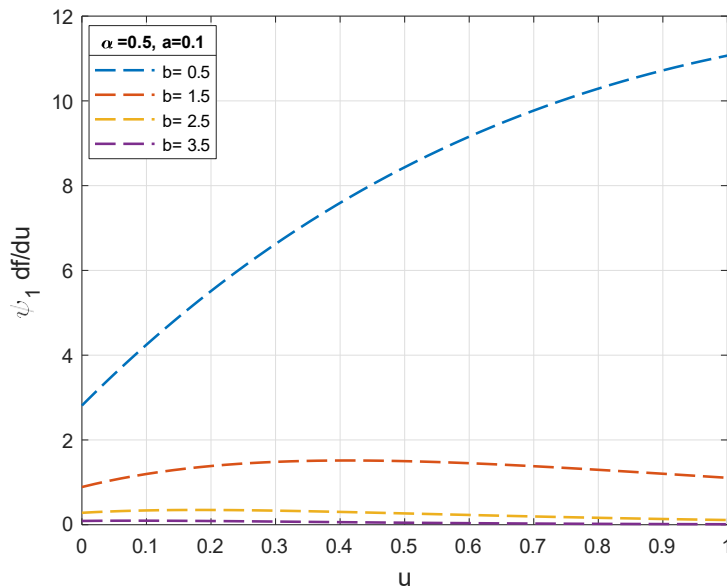


Figura 2.3: Análisis de la derivada conformable cuando $\psi_1(u, b)$

Una vez analizada la variación de los parámetros de la función conformable ψ_1 , es posible afirmar que la función depende significativamente de ellos, y a su vez, éstos pueden otorgarle flexibilidad para ajustarse a procesos físicos o modelos ya establecidos, por los que su selección y la obtención de los parámetros óptimos permitirán una mejor descripción de procesos físicos.

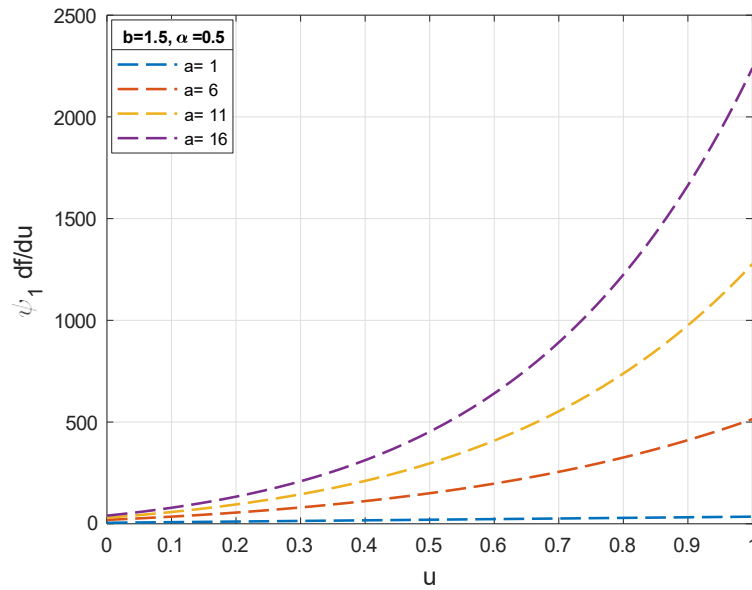


Figura 2.4: Análisis de la derivada conformable cuando $\psi_1(u, a)$

En la siguiente sección se presenta el mismo análisis para la segunda función conformable elegida.

2.2.2. Función conformable ψ_2 y su derivada

La segunda función real elegida es:

$$\psi_2(u, \alpha) = \frac{(1+b)u^{(1-\alpha)e^{-a}}}{1+bu^{a(1-\alpha)}}, \quad (2.11)$$

donde $\psi_2 : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y cuyos parámetros son $a, b \in \mathbb{R}^+$. Si se considera que u representa a una variable espacial y que los parámetros a, α son adimensionales, se presenta el siguiente análisis dimensional:

$$\psi_2(u, \alpha) = \frac{(1 + [L]^{-a(1-\alpha)})[L]^{(1-\alpha)e^{-a}}}{1 + [L]^{-a(1-\alpha)}[L]^{a(1-\alpha)}} = \frac{[L]^{(1-\alpha)e^{-a}}}{[L]^{a(1-\alpha)}} = [L]^{(1-\alpha)(e^{-a} - a)}$$

donde b presenta dimensiones de longitud $[L]$ elevadas a la potencia $a(1 - \alpha)$, mientras que la función conformable también presenta dimensiones de longitud elevadas a la potencia $(1 - \alpha)(e^{-a} - a)$. Debido a las dimensiones propias de la función, es indispensable incluir algún parámetro adicional para la consistencia dimensional, previamente [44] propusieron.

Una vez realizado el análisis dimensional, sigue conocer con mayor detalle el impacto de los parámetros de ψ_2 en la función parabólica, para ello se presentan las Figs.2.5-2.7, en las que se muestra a la derivada como función de la variable independiente para diferentes valores de los parámetros. Primero se analiza el impacto de α manteniendo fijos los valores de $a = 0.1$ y $b = 1.5$ (Fig.2.2), observando que conforme $\alpha \rightarrow 1$ la función se va acercando al comportamiento clásico y , que mientras $\alpha \rightarrow 0$ el rango de la derivada disminuye. Posteriormente, en la Fig.2.3 se analiza la variación de b al mantener fijas $a = 0.1$ y $\alpha = 0.5$, en ésta realizó un acercamiento ya que la función es bastante parecida para todos los casos de b , sin embargo, cuando éste disminuye, el valor de la derivada también decrece. Se observa que para valores mayores a $b = 23.5$, la derivada se mantiene básicamente en el mismo intervalo. Finalmente, al mantener constantes los valores de $\alpha = 0.5$ y $b = 1.5$, se analiza la variación de a en el comportamiento de la derivada, la cual alcanza valores más altos conforme a aumenta.

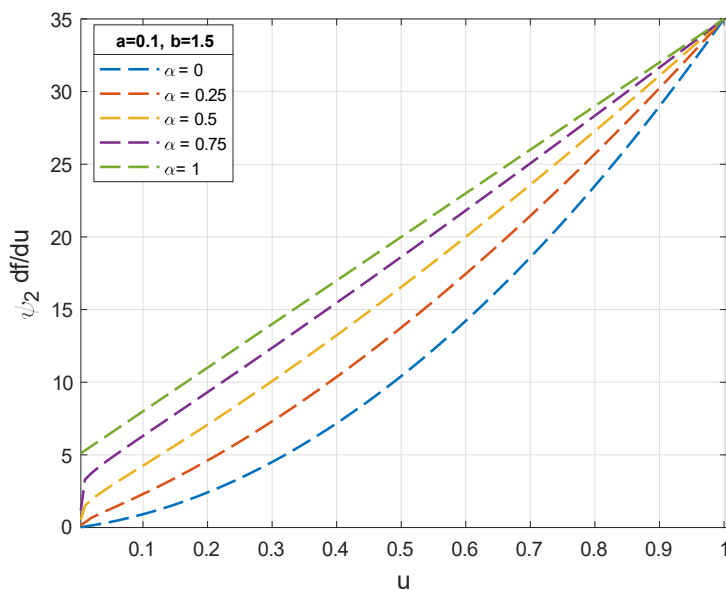


Figura 2.5: Análisis de la derivada conformable cuando $\psi_2(u, \alpha)$

A partir de las gráficas presentadas se observa nuevamente que la elección de los parámetros de la función $\psi_2(u, \alpha)$ debe realizarse bajo criterios bien definidos, ya que su variación impacta significativamente a la derivada. En cuanto a la selección de los valores de a, b, α se considera relevante definir el modelo que incluirá a la derivada conformable y encontrar qué cambios físicos y matemáticos suponen para establecer un mecanismo que permita identificar los valores óptimos de estos parámetros.

En este trabajo se plantea analizar el efecto de las derivadas conformables en un modelo de flujo de fluidos, es por ello que en la siguiente sección se elige al modelo simplificado

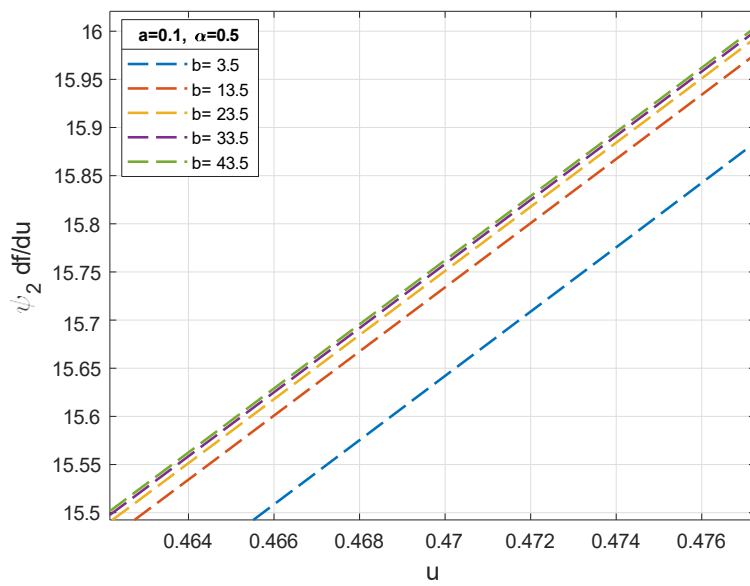


Figura 2.6: Análisis de la derivada conformable cuando $\psi_2(u, b)$

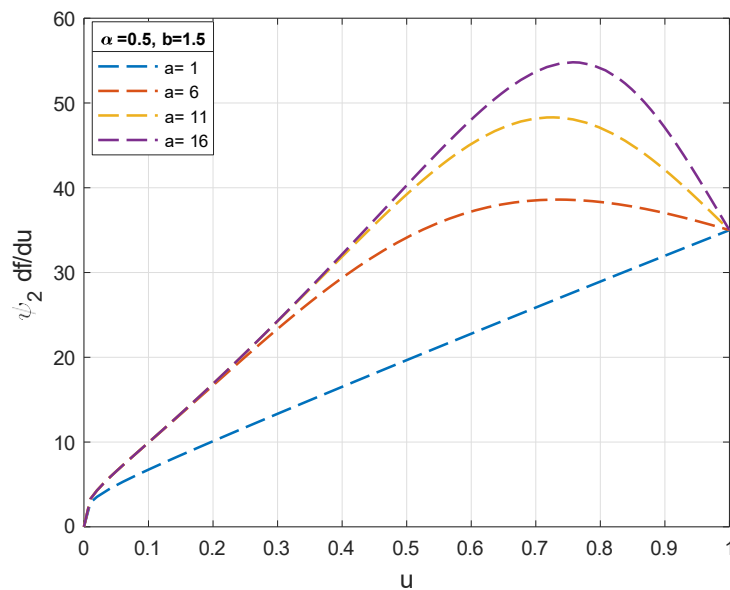


Figura 2.7: Análisis de la derivada conformable cuando $\psi_2(u, a)$

de las ecuaciones de Navier-Stokes, se introduce el operador de orden no entero y se analiza el comportamiento de los parámetros a , b y α , con la finalidad de identificar sus valores óptimos en la descripción de un proceso físico.

2.3. Modelo simplificado con derivada conformable

Las derivadas conformables elegidas pueden incluirse en las ecuaciones de Navier-Stokes para obtener un modelo de flujo a partir de dos formas, la primera considerando a la derivada conformable del eje y (definidas en la sección anterior), mientras que el resto de las derivadas se definen como de orden entero ($\alpha = 1$), y se hace la simplificación de las ecuaciones diferenciales. Por otro lado, la segunda forma incorpora a la derivada conformable espacial directamente al modelo simplificado, como el flujo planar de Poiseuille (Ec.(1.26)). Ambas metodologías arrojan la misma ecuación diferencial ordinaria. Sin embargo, para el segundo método, es necesario definir la forma que adquiere la segunda derivada conformable, incluyendo a la variable dependiente v_x y a la variable independiente y se obtiene:

$$D_{\psi}^{\alpha}(D_{\psi}^{\alpha}v_x(y)) = \psi(y, \alpha) \frac{d}{d} \quad \psi(y, \alpha) \frac{dv_x}{d} \quad (2.12)$$

Una vez definida la segunda derivada y las opciones para incluirla en ecuación de balance de momentum, se presentan los modelos correspondientes a las funciones seleccionadas, comenzando con la primera función conformable denominada $\psi_1(y, \alpha)$.

2.3.1. Modelo difusivo conformable- ψ_1

En esta sección se toma la segunda derivada (Ec.(2.12)) y se introduce al modelo viscoso del flujo a través de dos placas paralelas (Ec.(1.26)), obteniendo una ecuación diferencial que será denominada *Modelo Conformable- ψ_1* :

$$\frac{d^2v_x}{dy^2} + b(1 - \alpha) \log(a) \frac{dv_x}{dy} = - \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} a^{-2(1+b)(1-\alpha)} \quad (2.13)$$

Esta ecuación diferencial sigue siendo ordinaria, lineal, de segundo orden y no homogénea, al igual que el modelo viscoso clásico, por lo que es posible obtener su solución a través de métodos tradicionales para ecuaciones diferenciales.

$$v_x(y) = - \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} \frac{a^{-2(1-\alpha)(1+b)}}{((1 - \alpha)b \log(a))^2} - C_1 \frac{a^{-(1-\alpha)(1+b)}}{(1 - \alpha)b \log(a)} + C_2 \quad (2.14)$$

El perfil de velocidad particular del Modelo Conformable- ψ_1 , considerando condiciones de frontera de no deslizamiento en las placas fijas se expresa en la Ec.(2.15), en la que se observa que la velocidad del fluido es una función de la posición, el gradiente de presión,

la viscosidad del fluido y los parámetros a, b, α .

$$v_x(y) = \frac{dP/dx}{2\mu ((1-\alpha)b \log(a))^2} \left(a^{-2(1-\alpha)} - a^{-2(1-\alpha)(1+by)} \right) + \frac{a^{-2(1-\alpha)} - a^{-2(1-\alpha)(1+bh)}}{(a^{-(1-\alpha)} + a^{-(1-\alpha)(1+bh)})} \left(a^{-(1-\alpha)(1+by)} - a^{-(1-\alpha)} \right) \quad (2.15)$$

La solución del modelo clásico, presentada en la Ec.(1.28), puede recuperarse del perfil Conformable- ψ_1 al aplicar el límite conforme $\alpha \rightarrow 1$ y la regla de L'Hôpital.

Una vez obtenida la velocidad se presentan las gráficas correspondientes a ésta, en las que se muestra el efecto de los parámetros a, b, α en la magnitud del perfil. Para este análisis se emplean los siguientes valores para el gradiente de presión, viscosidad y separación entre las placas $dP/dx = 1.5Pa/m$, $\mu = 0.001Pas$ (agua), $h = 0.1m$ respectivamente.

En la Fig.2.8 se muestra con marcadores circulares la solución clásica de N-S y con líneas de colores los perfiles conformables para diferentes valores de $a = \{1.5, 30\}$, $b = \{0.1, 2\}$ y $\alpha = \{0.45, 0.6, 0.9\}$. En todos los perfiles se observa que la velocidad del modelo conformable- ψ_1 es menor que el de orden entero, y que conforme $\alpha \rightarrow 1$, la velocidad va incrementando. Analizando los cuatro cuadros de la figura también se observa que conforme a y b aumentan, la velocidad disminuye. Este comportamiento puede observarse mejor para diferentes valores de a . En consecuencia, el modelo de orden no entero puede representar casos en los que la velocidad decrezca bajo el mismo gradiente de presión, por lo que más adelante se hará una comparación con un caso particular en el que el movimiento del fluido decrece.

Además del perfil de velocidad del fluido se obtiene la expresión para el flujo volumétrico del sistema, el cual también estará impactado por los parámetros a, b, α , como se observa en la siguiente expresión:

$$Q_{c_\psi} = B \frac{a^{-2(1-\alpha)} - a^{-2(1-\alpha)(1+bh)}}{2(1-\alpha)b \log(a)} - ha^{-(1-\alpha)(2+bh)} \quad (2.16)$$

Una vez definido el comportamiento del primer modelo conformable se desarrolla la misma estrategia para el modelo con ψ_2 .

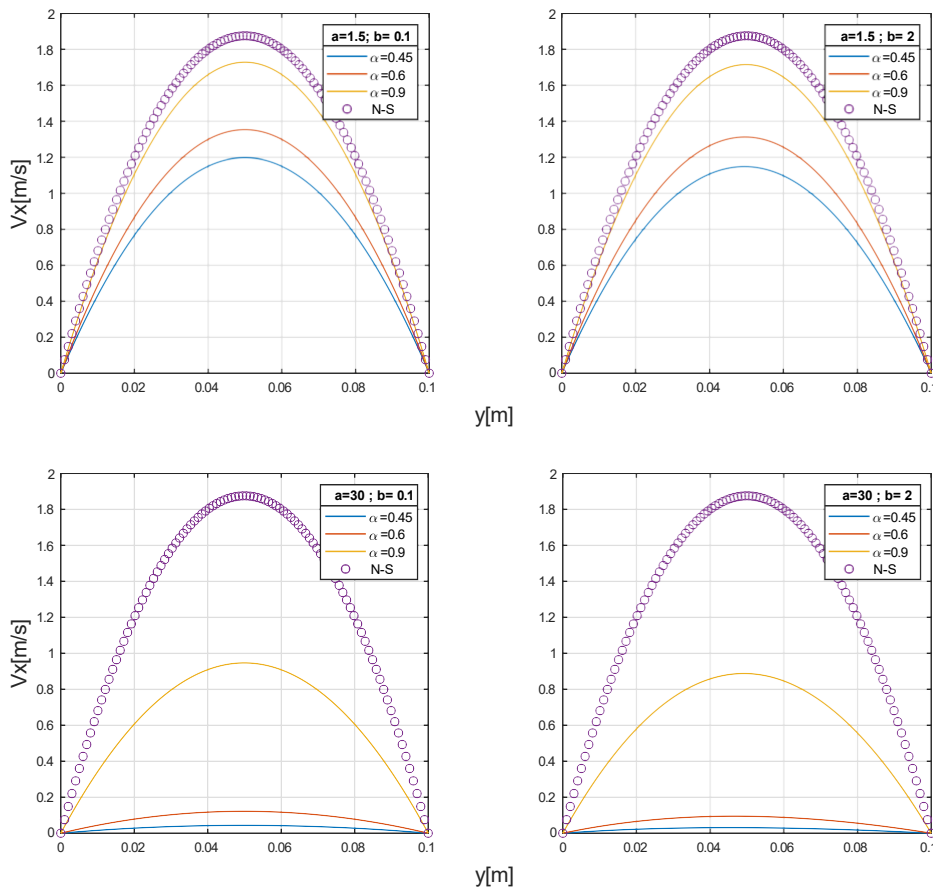


Figura 2.8: Perfiles de velocidad del Modelo Conformable- ψ_1

2.3.2. Modelo conformable- ψ_2

En esta sección se obtiene el perfil de velocidad al emplear la segunda función en la derivada conformable. Para iniciar es necesario abordar el tema de su dimensionalidad, ya que en la Sección 2.2.2 se mostró que la función ψ_2 (Ec.(2.11)) tiene dimensiones de longitud elevada a una potencia, lo que modificaría las unidades de la derivada y del modelo viscoso. Es por ello que se propone incluir una constante que permita adimensionalizar a la derivada, tal como se ha definido en otros trabajos [44, 45]. Con esta nueva constante la derivada toma la forma:

$$D_{\psi_2}^{\alpha} = \frac{1}{\sigma^{(1-\alpha)(e^{-a}-a)}} \psi_2(y, \alpha) \frac{d}{dy}, \quad (2.17)$$

donde σ es una constante con dimensiones de longitud y que de acuerdo con el trabajo de Gómez-Aguilar [44], podría caracterizar al espacio conformable, representado características intermedias entre un medio poroso y uno homogéneo. Con este nuevo parámetro es posible recuperar la dimensionalidad de una derivada espacial clásica $1/L$.

Una vez abordado el tema de la dimensionalidad de la derivada, se presenta la forma que toma la ecuación diferencial que la incluye:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(1+b)y^{(1-\alpha)\exp(-\alpha)} dv_x}{1+by^{a(1-\alpha)}} \right) = -\frac{1}{\mu_c} \frac{dP}{dx} \frac{1+by^{a(1-\alpha)}}{(1+b)y^{(1-\alpha)\exp(-\alpha)}}. \quad (2.18)$$

donde μ_c representa a una viscosidad del medio conformable, la cual es una relación entre la propiedad clásica de los fluidos y la constante del medio conformable $\mu/\sigma^{2(1-\alpha)(e^{-a}-a)}$. El modelo sigue siendo una ecuación diferencial lineal de segundo orden y su solución, considerando condiciones de no deslizamiento, está expresada por la siguiente ecuación:

$$v_{x\psi_2}(y) = A \left[\frac{y^{1-(1-\alpha)e^{-a}}}{1-(1-\alpha)e^{-a}} + \frac{by^{1+(1-\alpha)(a-e^{-a})}}{1+(1-\alpha)(a-e^{-a})} \right] + C_1 \left[\frac{y^{1-(1-\alpha)e^{-a}}}{1-(1-\alpha)e^{-a}} + \frac{by^{1+(1-\alpha)(a-e^{-a})}}{1+(1-\alpha)(a-e^{-a})} \right], \quad (2.19)$$

donde $A = -\frac{1}{2\mu_c(1+b)^2} \frac{dP}{dx}$, y

$$C_1 = \frac{h^{-(1-\alpha)e^{-a}+1}}{1-(1-\alpha)e^{-a}} + \frac{bh^{-(1-\alpha)(e^{-a}-a)+1}}{1+(1-\alpha)(a-e^{-a})}.$$

Para este modelo es más sencillo obtener a la solución clásica, únicamente hay que sustituir $\alpha = 1$.

Al igual que en el modelo ψ_1 , se presentan los perfiles de velocidad empleando los mismos datos de gradiente de presión, viscosidad y separación entre las placas. Adicionalmente se considera que $\mu_c = \mu$ y se analiza la variación del perfil con los parámetros conformables. En la Fig.(2.9) se muestra cómo el perfil de velocidad se ve afectado por los valores que toman los parámetros conformables, en la parte superior se analizan b , α manteniendo el valor de $a = 1.5$, mientras que en la parte inferior el valor de $a = 30$. Se observa que con la nueva función la parábola no es simétrica, muestra una desviación respecto a la clásica, encontrando el máximo valor de la velocidad en $y < 0.05m$ (un punto más cercano a la placa inferior). En cuanto a la magnitud de la velocidad, es posible notar que conforme $b \rightarrow 0$ ésta es mayor, y que el valor de α también impacta a la magnitud y a la simetría de la parábola. Asimismo, la velocidad puede presentar valores máximos de velocidad por arriba y por debajo del perfil clásico, a diferencia del modelo- ψ_1 , en donde sólo se obtienen perfiles con menor magnitud. Por lo que este modelo puede representar casos en los que la velocidad decrezca o incremente bajo el mismo gradiente de presión, dependiendo del valor de α

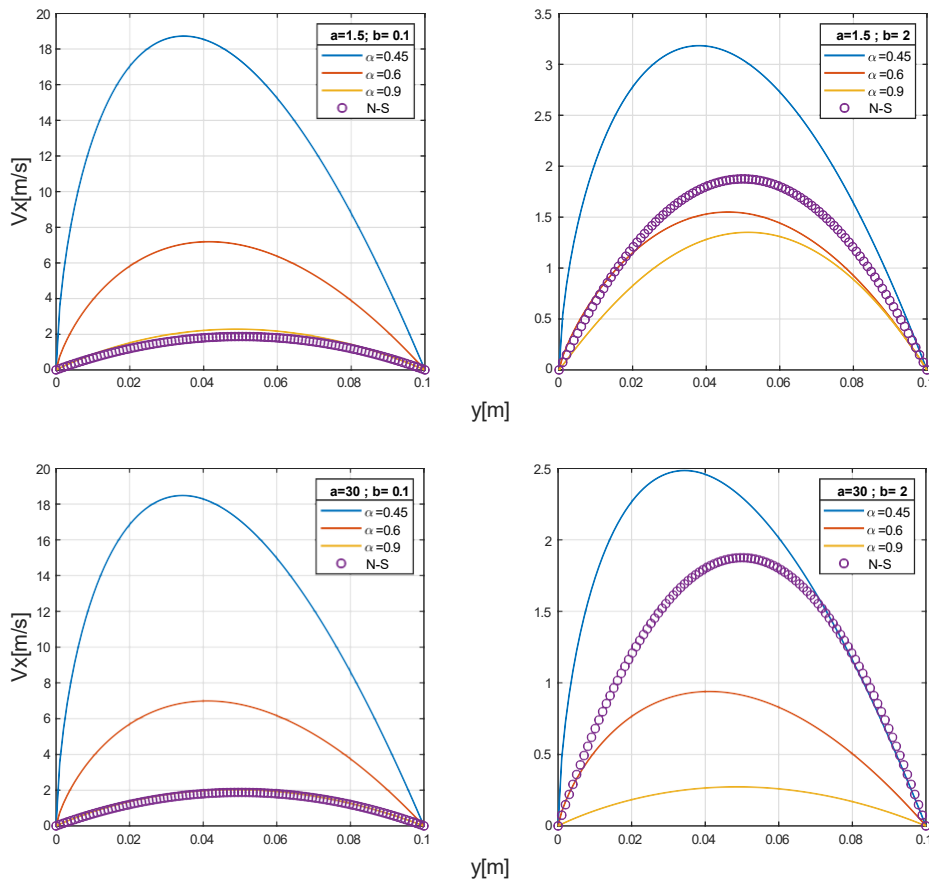


Figura 2.9: Perfiles de velocidad del Modelo Conformable- ψ_2

Una vez obtenido el perfil de velocidad, se obtiene el flujo volumétrico, el cuál está expresado por:

$$Q_{c\psi_2} = \frac{dP}{dx} \frac{h^3}{2\mu_c(1+b)^2} \frac{h^{-2(1-\alpha)}e^{-\alpha}}{p_0(\alpha)p_1(\alpha)} + \frac{p_2(\alpha)bh^{(1-\alpha)(a-2e^{-\alpha})}}{p_0(\alpha)p_3(\alpha)p_4(\alpha)} + \frac{b^2h^{2(1-\alpha)(a-e^{-\alpha})}}{p_3(\alpha)p_5(\alpha)} ; \quad (2.20)$$

donde los polinomios $p_i(\alpha)$, están definidos como:

$$p_0(\alpha) = 1 - (1 - \alpha)e^{-\alpha};$$

$$p_1(\alpha) = 6 - 5(1 - \alpha)e^{-\alpha};$$

$$p_2(\alpha) = (1 - \alpha)^2(a^2 - 2e^{-2a} - 2ae^{-a}) + 3(1 - \alpha)(a - 2e^{-a}) + 4;$$

$$p_3(\alpha) = 1 + (1 - \alpha)(a - e^{-a});$$

$$p_4(\alpha) = -(1 - \alpha)^3(a^2 - 3ae^{-a} + 2e^{-2a}) + (1 - \alpha)^2 \left[(a - 2e^{-a})(2a - 4e^{-a}) - (a - e^{-a}) + 2(1 - \alpha)(a - 2e^{-2a}) + 12; \right]$$

$$p_5(\alpha) = 2(1 - \alpha)^2(a - e^{-a})^2 + 7(1 - \alpha)(a - e^{-a}) + 6.$$

Una vez obtenidas las expresiones que caracterizan el flujo del fluido en el modelo conformable, es momento de hacer una comparación con el modelo clásico.

2.3.3. Comparación entre modelos conformables y el modelo clásico

En las secciones 1.3.1 y 2.3 se muestran las ecuaciones diferenciales, perfiles de velocidad y flujo volumétrico para el modelo clásico de N-S y los modelos conformables. En esta sección se analiza las similitudes y diferencias entre los modelos, iniciando con la forma de la ecuación diferencial.

Para el modelo clásico (Ec.(1.26)) la ecuación diferencial que describe el proceso de difusión de momentum es de segundo orden, lineal, ordinaria, con coeficientes constantes y no homogénea. El modelo conformable ψ_1 (Ec.(2.13)) mantiene la misma clasificación que el modelo clásico, mientras que el modelo ψ_2 (Ec.(2.18)), únicamente cambia en la clasificación del tipo de coeficientes de la ecuación diferencial, presentando coeficientes variables. Para todos los modelos fue posible emplear métodos tradicionales de solución de ecuaciones diferenciales.

Respecto a la forma del perfil de velocidad, todos los modelos describen el proceso de difusión mediante una gráfica que es parabólica. Tanto el modelo clásico como el modelo conformable ψ_1 presentan la máxima velocidad en el centro entre las placas ($y = h/2$), mientras que el modelo conformable ψ_2 presenta algunos casos en donde el valor máximo de velocidad está desplazado a la derecha, definiendo una parábola que no es simétrica. En el modelo conformable ψ_1 , todos los perfiles de velocidad presentan menor magnitud que el perfil clásico, lo cual nos indica que este puede representar procesos en donde la velocidad del fluido se vuelve menor, este tipo de procesos pueden deberse a la presencia de obstáculos físicos cuando las condiciones de presión y longitud característica son las mismas. En relación con el segundo modelo conformable ψ_2 , existen valores de la velocidad mayores y menores que el modelo clásico, este comportamiento está marcado por los parámetros a , b , α , lo que indica que existe un intervalo de estos parámetros en los que es posible definir procesos como los del modelo ψ_1 , mientras que hay otros valores en donde es posible definir el flujo de un fluido con mayor velocidad.

Finalmente, el flujo volumétrico en los modelos conformables, además de depender de la longitud característica del sistema, es una función de los parámetros a , b , α , mientras que en el modelo clásico solamente depende de la longitud característica del sistema h . En la Fig.2.10 se muestran los flujos volumétricos, para un valor fijo de $h = 0.1\text{m}$ y de los parámetros conformables, en función del gradiente de presión. Esta figura es clásica en mecánica de fluidos ya que permite observar si el flujo volumétrico es una función lineal del gradiente de presión, para todos los modelos este comportamiento se cumple, con diferentes pendientes. El modelo clásico es el que presenta una menor pendiente, y por lo tanto, mayor flujo volumétrico que los modelos conformables.

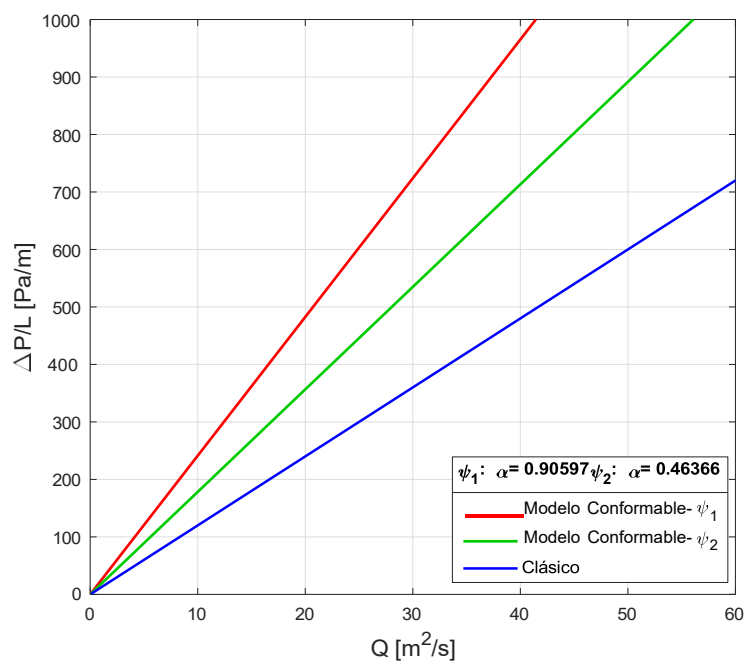


Figura 2.10: Flujo volumétrico en función del gradiente de presión

Con base en las características de los modelos conformables se considera que éstos pueden describir al flujo a través de un medio poroso, ya que éstos presentan menor magnitud en la velocidad y menor flujo volumétrico que el modelo clásico. Estas características son resultado de la función espacial conformable y pueden tener relación directa con la geometría del sistema y la fase sólida. Por lo que, en el siguiente capítulo se definirán los casos en los que los nuevos modelos pueden ser empleados para definir el flujo a través de un medio poroso.

Capítulo 3

Modelos conformables describiendo el flujo en medios porosos

En este Capítulo se definen los casos en los que los modelos conformables son capaces de describir el flujo de fluidos a través de medios porosos. Mediante un proceso de optimización de los parámetros de la derivada es posible encontrar un intervalo en el que los modelos de orden no entero describen el flujo a través de medios porosos con permeabilidad constante y variable. Los resultados obtenidos en este capítulo ya se encuentran publicados en [46].

3.1. Flujo a través de medios porosos

Para poder iniciar el análisis es importante describir las características de un medio poroso y del flujo a través de éste, así como de las ecuaciones básicas que lo describen.

De acuerdo con Bear [47] un medio poroso puede describirse, desde el punto de vista macroscópico, como una porción del espacio ocupado por un sistema multifásico o heterogéneo, en donde una de las fases es sólida y denominada matriz sólida, mientras que otra fase se denomina espacio poroso o vacío. Una de sus características es que la superficie específica del sólido debe ser elevada, mientras que al menos una porción de los espacios vacíos debe estar interconectada.

Existen propiedades que caracterizan a los medios porosos, e incluso permiten clasificarlos, por ejemplo la porosidad que está definida como la fracción volumétrica de espacios vacíos $\epsilon = V_{poros}/V_{medio\ poroso}$ ó la permeabilidad (K), la cual determina la cantidad de fluido que

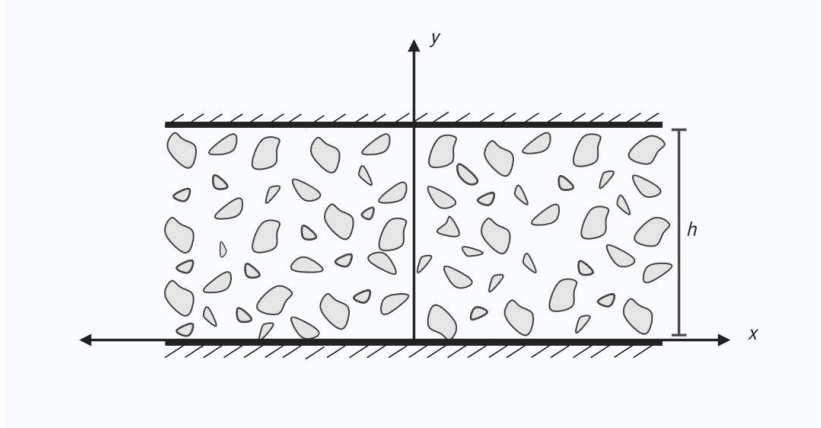


Figura 3.1: Representación del dominio de un medio poroso

puede atravesar el medio poroso y que depende de las características del medio [47]. Dichas propiedades son de importancia para definir a los modelos de flujo en estos medios, como la ley de Darcy o la ley de Brinkman.

La ley de Darcy es una relación empírica de las más empleadas para definir la velocidad promedio superficial a través de un medio poroso de baja permeabilidad [48], la Ec.(3.1) está escrita en forma general, representado al vector velocidad (\mathbf{v}) y al gradiente de presión (∇P)

$$\mathbf{v} = -\frac{K}{\mu} \nabla P. \quad (3.1)$$

En la Ec.(3.1) no se toman en cuenta los efectos viscosos, a través del tensor de esfuerzos, por lo que, al incluir estos efectos se obtiene la ecuación de Brinkman, la cual toma en cuenta las interacciones por esfuerzos cortantes y funciona para medios con alta porosidad [48], expresada de forma vectorial como:

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K} \mathbf{v} + \mu_e \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (3.2)$$

donde μ_e es una viscosidad efectiva del medio poroso.

Estas ecuaciones pueden expresarse para diferentes sistemas coordenados y para componentes específicos de la velocidad.

Para realizar la comparación entre los modelos de medios porosos y los conformables se tomará como referencia el dominio mostrado en el diagrama de la Fig.3.1, que sigue siendo un sistema rectangular con una longitud h que separa a las placas.

La ecuación de Darcy da como información una velocidad promedio a la que se mueve el fluido a través del medio poroso, mientras que el modelo de Brinkman permite obtener el perfil de velocidad a través del sistema, es por ello que se elige como forma de comparar contra los modelos conformables.

3.1.1. Brinkman con permeabilidad constante

Para conocer la solución del modelo de Brinkman se considera un sistema simple con permeabilidad constante $K = cte$, con componente de velocidad v'_x y gradiente de presión constante, por lo que la Ec.(3.2) se transforma en:

$$\frac{dP}{d} = -\frac{\mu}{K}v'_x + \mu e \frac{d^2 v'_x}{dy^2}, \quad (3.3)$$

cuya solución, con condiciones de frontera de no deslizamiento, es

$$v'_x = \frac{K dP}{\mu dx} \left[1 - \cosh \frac{\sqrt{-} Ah}{Ay} - \frac{1 - \cosh \sqrt{-} Ah}{\sinh \sqrt{-} Ah} \sinh \frac{\sqrt{-} Ah}{Ay} \right], \quad (3.4)$$

donde $A = 1/K$.

Para el flujo volumétrico se obtiene:

$$Q_B = \frac{K dP}{\mu d} \left[h + \frac{2}{\sqrt{-}} \frac{1 - \sinh \sqrt{-} Ah}{\cosh \sqrt{-} Ah} \right]. \quad (3.5)$$

Tanto el perfil de velocidad (Ec.(3.4)) como el flujo volumétrico (Ec.(3.5)) representan el movimiento del fluido a través de un medio poroso, en el que la máxima velocidad está en el centro entre las placas y el flujo volumétrico es proporcional al gradiente de presión.

3.1.2. Brinkman con permeabilidad variable

La permeabilidad es una de las características más empleadas en los medios porosos, por lo que determinar su valor y si es función de otras variables ha sido ampliamente estudiado. Por un lado, varias investigaciones se enfocan en caracterizar a la permeabilidad a través de experimentos [49–53], por otro lado, algunos trabajos obtienen expresiones matemáticas que relacionen a la permeabilidad con otras características del medio poroso [54–59], por mencionar algunos ejemplos.

En este trabajo se seleccionó a la permeabilidad como una función del espacio, basada en el trabajo de Hamdan y Kamel [59], que intenta representar la variación de la permeabilidad cerca de interfases entre diferentes medios porosos evitando discontinuidad en el flujo. En su trabajo proponen a una función cuadrática de la forma $K = \hat{a}y^2 + \hat{b}y + \hat{c}$, la cual representa baja permeabilidad cerca de las paredes sólidas y mayor permeabilidad cerca del centro del dominio ($h/2$). Esta función se selecciona con la finalidad de observar transición de flujos de zonas de alta a baja permeabilidad o viceversa.

Al incluir la función de permeabilidad al modelo de Brinkman, Ec.(3.3), se obtiene:

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \mu_e \frac{d^2 v'_x}{dy^2} - \frac{\mu}{\hat{a}(y^2 - hy)} v'_x \quad (3.6)$$

cuya solución es obtenida considerando que $K(0) = K(h) = 0$:

$$v'_{x,K} = -\frac{1}{\mu_e} \frac{dP}{dx} \left[\frac{4}{8 + Ha} (y^2 - hy) \right], \quad (3.7)$$

donde Ha es un número adimensional definido por $Ha = \mu h^2 / (\mu_e K)$, dentro de este número adimensional se encuentra otro que surge frecuentemente en medios porosos, el número de Darcy, $Da = K/h^2$, por lo que el Ha puede ser también escrito como $Ha = \mu / (\mu_e Da)$.

El flujo volumétrico de este modelo queda expresado como:

$$\frac{Q_{v,K}}{\tau \dots} = \frac{2}{e} \frac{dP}{dx} \frac{h^3}{8 + Ha} \quad (3.8)$$

Una vez que se conocen los perfiles de velocidad y flujos volumétricos de los modelos de Brinkman, se hace la comparación entre ellos y las soluciones de los modelos conformables.

3.2. Comparación de los modelos de Brinkman con los conformables

En esta sección se realiza la comparación de los modelos conformables con los modelos de Brinkman con permeabilidad constante y variable. Una vez obtenidas las ecuaciones y soluciones del modelo clásico de medio porosos se comparan con los modelos conformables en la Fig.3.2. En esta se muestran los perfiles de velocidad para los modelos de Brinkman y conformables, empleando los valores de $dP/dx = 1.5 \text{ Pa/m}$ y $\mu = \mu_e = 1 \times 10^{-3} \text{ Pas}$.

Los perfiles de los modelos de medios porosos (línea continua y punteada) están dentro del intervalo de perfiles de velocidad que pueden describir los modelos conformables (líneas con marcadores), siendo el modelo ψ_1 el que muestra la menor magnitud de velocidad, mientras que el ψ_2 los valores más altos para la velocidad. En los perfiles de medios porosos se observa que la forma parabólica puede modificarse de acuerdo al modelo y características del medio poroso. Respecto a los modelos conformables se eligen valores arbitrarios para a, b, α , señalados en la figura, los cuales pueden modificarse para que el comportamiento de éstos pueda describir los perfiles porosos. Esto se realiza a través de un proceso de optimización, donde se obtendrán los parámetros a, b, α adecuados para describir el flujo a través de estos medios.

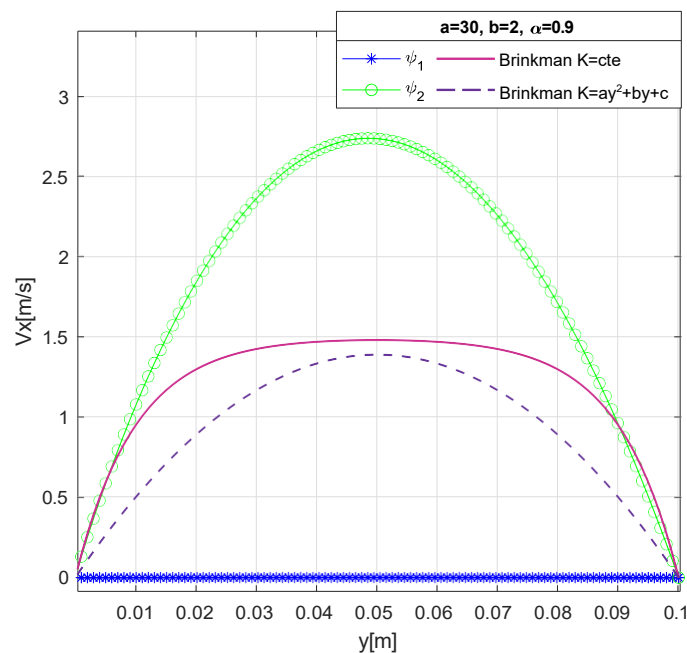


Figura 3.2: Perfiles de velocidad conformables y de Brinkman

3.2.1. Modelos conformables optimizados describiendo el flujo de Brinkman con permeabilidad constante

Para analizar a los modelos conformables respecto a los medios porosos (Ec.(3.4)), se incluye la variación del valor de la porosidad K y se realiza un proceso de optimización de parámetros en Matlab (Ver Apéndice A). Los valores optimizados de a , b y α son distintos para cada modelo conformable y también muestran variaciones al cambiar el valor de K . Los perfiles de velocidad conformables optimizados (línea azul) son comparados con los perfiles resultantes del modelo de Brinkman para ψ_1 y ψ_2 respectivamente (ver Figs.3.3a-3.3b). Los perfiles son parabólicos para un valor de número de Darcy de $= 0.1$, en ambos casos, los modelos conformables se ajustan con precisión al perfil del medio poroso.

Con la finalidad de analizar bajo qué condiciones estos modelos pueden describir al medio poroso, se realizó un análisis a través de los valores de permeabilidad. En las tablas 3.1-3.2 se muestran los valores óptimos de a , b y α para los modelos ψ_1 y ψ_2 respectivamente. Se incluye una columna para indicar la permeabilidad y otra para el número de Da (h^2/K), el cual relaciona una forma de longitud característica del medio poroso y la longitud característica del dominio completo. Se eligió al número de Darcy como el número adimensional que caracteriza el intervalo de aplicación de los modelos conformables, ya que ha sido utilizado para caracterizar y analizar medios porosos. En el trabajo de Parvazinia y colaboradores [60] fue empleado para definir el régimen del modelo de Brinkman, donde el flujo con $Da > 1$ representa el flujo en un medio que no es poroso, el intervalo de $1 > Da > 10^{-6}$ es un sistema de alta permeabilidad, mientras que $Da < 10^{-6}$ es de baja permeabilidad. Con base en esta clasificación, se define el alcance de los modelos conformables.

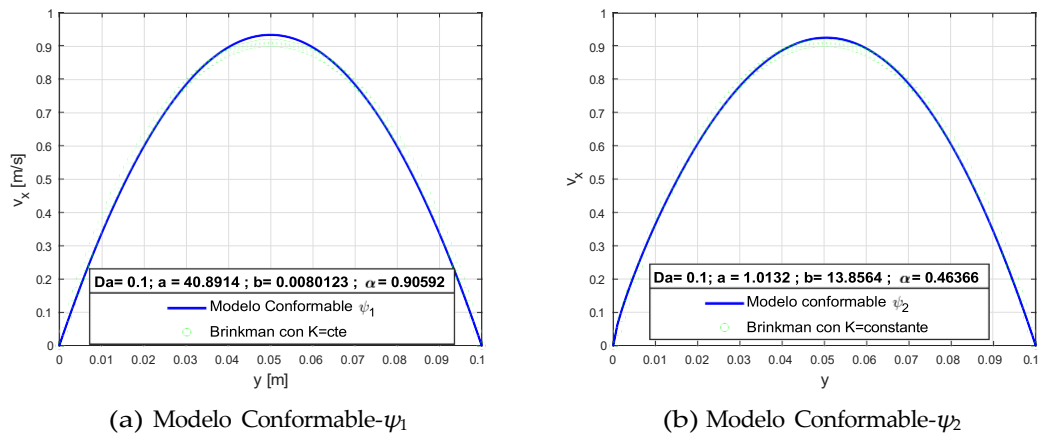


Figura 3.3: Perfil de velocidad del modelo de Brinkman comparado con los modelos conformables optimizados

Tabla 3.1: Valores óptimos de los parámetros conformables en ψ_1 para diferentes valores de permeabilidad

K	a	b	α	Da	max.err.abs	max. % error
1×10^{-5}	41.3695	0.0920	0.3827	0.001	0.0086	25.18
1×10^{-4}	46.0522	0.0142	0.6864	0.01	0.0338	13.28
5×10^{-4}	43.8897	0.0078	0.8539	0.05	0.0397	4.44
1×10^{-3}	40.891	0.008	0.906	0.1	0.0325	2.42
1×10^{-2}	1.116	0.032	0.562	1	0.0065	0.26

En el caso del modelo conformable- ψ_1 , éste representa con buena precisión sistemas de alta permeabilidad, ya que los errores mínimos son encontrados en $Da \geq 0.05$, mientras que conforme la permeabilidad disminuye el porcentaje de error aumenta.

Tabla 3.2: Valores óptimos de los parámetros conformables en ψ_2 para diferentes valores de permeabilidad

K	a	b	α	Da	max.error abs.	max. error rel.
1×10^{-5}	41.402	19.029	0.626	1×10^{-3}	9.5×10^{-3}	23.61
1×10^{-4}	50.014	3.365	0.818	0.01	0.039	12.64
5×10^{-4}	1.1342	26.4351	0.3708	0.05	0.0328	2.91
1×10^{-3}	1.0133	13.855	0.464	0.1	0.026	1.56
0.01	0.685	5.669	0.705	1	5.1×10^{-3}	0.17

Para el modelo ψ_2 el intervalo de validez se define para valores de $Da \geq 0.05$, ya que el porcentaje de error incrementa drásticamente ($> 10\%$) al disminuir el Da. En este caso, el error absoluto es menor para permeabilidades bajas, sin embargo, esto no representa adecuadamente la validez del modelo, ya que a menor permeabilidad, las magnitudes de la velocidad disminuyen y por tanto, también en los errores absolutos.

Con base en los porcentajes de error calculados se definen los intervalos para los cuales los modelos conformables son una representación precisa de los modelos de Brinkman con permeabilidad constante, definiendo que ningún modelo exceda el 5 %.

Asimismo, se optimizan los valores de a , b , α para obtener los flujos volumétricos de ambos modelos con la finalidad de analizar su capacidad para describir una propiedad medible. En la Fig. 3.4 se muestra el caso para $K = 1 \times 10^{-2}$, en donde se observa que el modelo con ψ_2 se aleja considerablemente de los valores del medio poroso y del modelo con ψ_1 , con un error absoluto considerable ($\text{max.abs.error} > 14$), mientras que el modelo con ψ_1 es más preciso ($\text{max.abs.error}=0.56$) y representa con precisión al flujo volumétrico del modelo de Brinkman. Este comportamiento se repite para diferentes valores de K , como se muestra en las Tablas 3.1 y 3.2.

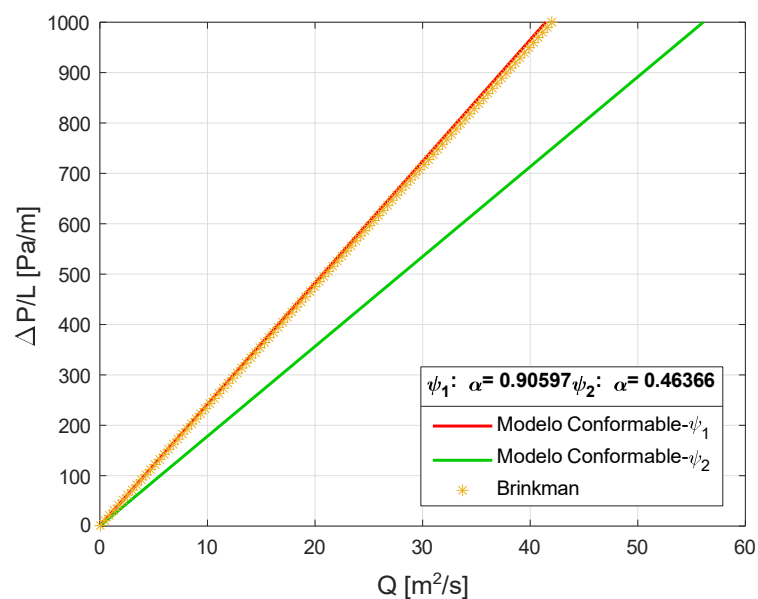


Figura 3.4: Ajuste de parámetros en el flujo volumétrico

Los resultados muestran que el modelo conformable ψ_2 muestra mayor precisión en describir una propiedad local, que depende del espacio, que una propiedad global medible. Esto puede sugerir la influencia y relación de la derivada conformable con la geometría del sistema.

3.2.2. Modelo ψ_1 validado con datos experimentales para un modelo de Brinkman con permeabilidad constante

Con la finalidad de validar con datos experimentales se compara al modelo conformable ψ_1 con los experimentos reportados por Gupte and Advani [61]. En su estudio describen un flujo unidireccional a través de un medio poroso entre dos placas paralelas. El medio poroso es un conjunto de fibras cilíndricas alineadas, también denominado *preform* [62] (zona verde de la Fig.

3.5), que está en contacto con una frontera permeable (zona amarilla). Este tipo de sistemas es definido como una celda de Hele-Shaw, en la que el espacio está parcialmente conformada por un medio poroso ($y < 0$), mientras que otra sección es un espacio vacío que actúa como un medio poroso de alta permeabilidad (sección de flujo libre).

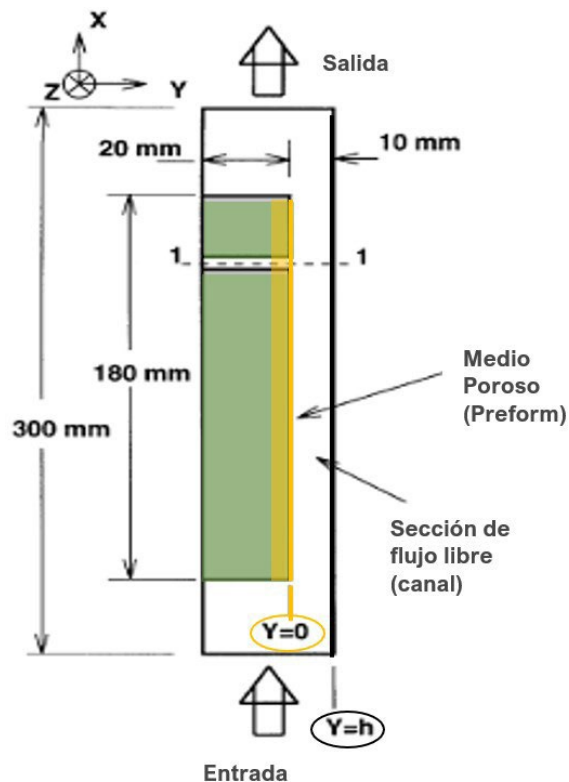


Figura 3.5: Diagrama experimental extraído del trabajo de Gupte y Advani [61]

El acoplamiento entre las dos zonas es a través de una capa límite (zona amarilla), de la cual obtuvieron mediciones experimentales con técnicas de Anemometría Láser Doppler (LDA por sus siglas en inglés). Esta metodología experimental es una técnica no invasiva que se centra en los cambios de luz esparcida por las partículas suspendidas en los fluidos [63], y a través de ella, los autores midieron la velocidad en la capa límite, estimando una velocidad de deslizamiento entre las dos zonas de flujo. Con estos resultados obtienen un valor específico del cociente $\frac{\mu_e}{\mu_s}$, con la finalidad de validar el uso de la ecuación de Brinkman en esta zona. Las expresiones matemáticas presentadas por los autores, así como las respectivas soluciones analíticas son definidas en forma adimensional, incluyendo una forma dimensional para los resultados experimentales.

El trabajo presentado por Gupte y Advani [61] muestra que el modelo de Brinkman no representa con gran precisión la información experimental, debido a la compleja estructura del medio poroso, proponiendo una modificación a las condiciones de frontera, definiendo un espesor definido como (T). Con esta condición impuesta, se incluye una información adicional al sistema, que puede ser medida, propuesta o una incógnita.

La dificultad que presentan la ley de Darcy y el modelo de Brinkman para representar flujos experimentales bien definidos, y la necesidad de parámetros adicionales que caractericen al medio poroso, dan oportunidad al modelo conformable de demostrar sus ventajas respecto a los modelos clásicos, por lo que se toman las consideraciones pertinentes para poder compararlo con los reportados por Gupte y Advani.

El modelo tomado para comparar es el correspondiente a la función ψ_1 , mostrado en la Ec.(2.19), al cual se le aplicó una condición de frontera distinta a la definida en la Sec.2.3.1. Para esta comparación se definió una de continuidad (entre las dos secciones de la celda) $v_x(x, -S) = U_{DI}$, $v_x(x, 0) = U_B$, donde $S \rightarrow \infty$, U_{DI} es la velocidad constante en la zona de flujo Darciano, y U_B es la velocidad de deslizamiento en la pared permeable. La solución particular del modelo de Brinkman considerando que $\mu_e/\mu = 0.55$ y el modelo ψ_1 con valores optimizados, para este modelo, son representados en la Fig.3.6. En ella se enfatizan dos secciones a través de líneas verticales en la posición $y = -4.6 \times 10^{-3}m$ y $y = -3.175 \times 10^{-3}m$, la primera representa el punto en el cual el número de Da es igual a 0.01; este valor es importante debido a que el intervalo de validez del modelo conformable con ψ_1 inicia en $Da=0.01$; mientras que la segunda línea representa el valor impuesto de la capa límite definida por los autores.

Con base en los resultados, el modelo conformable con ψ_1 presenta menor error absoluto que el modelo clásico de Brinkman en la zona de transición entre la zona de Darcy y el flujo libre $-3.2 \times 10^{-3} \leq y \leq 0$. Por el contrario, el modelo conformable falla en describir el flujo en la zona de $-7 \times 10^{-3} \leq y \leq -3.2 \times 10^{-3}$, donde la ecuación de Brinkman muestra menor error absoluto. Estos resultados son importantes ya que comprueban que el modelo conformable es capaz de reproducir información experimental una zona definida de flujo, incluso cuando el modelo no es preciso en toda la celda, resulta relevante definir zonas de aplicación experimental.

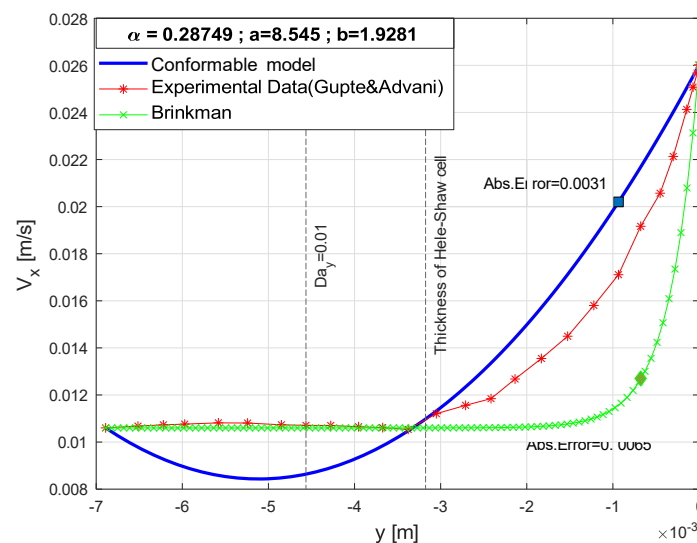


Figura 3.6: Comparación entre datos experimentales, el modelo de Brinkman y el modelo conformable ψ_1

El análisis presentado en el trabajo de Gupte and Advani es mucho más extenso, incluye información de desplazamiento de la capa límite y distintas configuraciones para las fibras del medio poroso. Esta información no es incluida en este trabajo, ya que solo resulta interesante representar la zona definida. Finalmente, el modelo con la función ψ_2 no fue incluido debido a que el dominio de esta función está limitada a valores positivos de y .

En las siguientes secciones se hará un análisis más detallado de los parámetros conformables, asimismo se presentan algunas ventajas y validaciones adicionales para el modelo con ψ_2 .

3.2.2.1. Permeabilidad como función de los parámetros conformables

Con la finalidad de establecer una relación entre los parámetros conformables y la geometría del medio poroso, se obtiene una expresión para la permeabilidad a través del gradiente de presión y la ley de Darcy como se realiza en los trabajos de Tamayol y colaboradores [64, 65].

El gradiente de presión (dP/dx) está presente en la expresión del flujo volumétrico, al despejarlo e integrarlo en un intervalo $[0, S]$, donde S representa la longitud característica del eje x , se obtiene la siguiente expresión para el modelo con ψ_1

$$\frac{\Delta P_{\psi_1}}{S} = \frac{Q_{\psi_1} \mu_2 (b(1-\alpha) \log(a))^2}{f_{\psi_1}(a, b, \alpha)} \quad (3.9)$$

donde:

$$f_{\psi_1}(a, b, \alpha) = \frac{(a^{-2(1-\alpha)} - a^{-2(1-\alpha)(1+bh)})}{2(1-\alpha)b \log(a)} - ha^{-2(1-\alpha)-bh(1-\alpha)}.$$

Incluyendo el gradiente de presión en ley de Darcy (Ec.(3.1) y despejando la permeabilidad se obtiene una expresión en términos de los parámetros conformables:

$$K_{\psi_1} = \frac{f(a, b, \alpha)}{2h(b(1-\alpha) \log(a))^2}, \quad (3.10)$$

en la que al tomar el límite $\alpha \rightarrow 1$ se obtiene la expresión del modelo clásico de N-S, esta representando :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} K = \frac{1}{1} h^2. \quad (3.11)$$

Para el modelo con ψ_2 se obtiene

$$K_{\psi_2} = \frac{f_{\psi_2}(b, \alpha)}{2h(1+b)^2}. \quad (3.12)$$

En la teoría clásica de medios porosos, la permeabilidad es una función de la porosidad, distribución y tamaño de fibras, diámetro de las partículas, entre otras [64]. Mientras que para los modelos conformables es una función de los parámetros a, b, α y la forma de las funciones elegidas. Para ver con claridad el impacto de éstos en la permeabilidad se obtienen las Figs.3.7-3.9, las cuales son útiles para sugerir una relación de los parámetros conformables y la estructura del

medio poroso, así como para justificar los valores obtenidos durante el proceso de optimización.

En la Fig.3.7 se representa el comportamiento decreciente de la permeabilidad cuando el valor de a aumenta e en ambos modelos (ψ_1 en rojo y ψ_2 en verde), manteniendo fijos los valores de b , α . Ambos modelos inician en el mismo orden de magnitud, sin embargo el modelo con ψ_2 muestra un aparente valor asintótico para la permeabilidad, como se observa en la Tabla 3.2, mientras que en el ψ_1 sigue decreciendo y se observa que entre más baja sea la permeabilidad, mayor el valor de a .

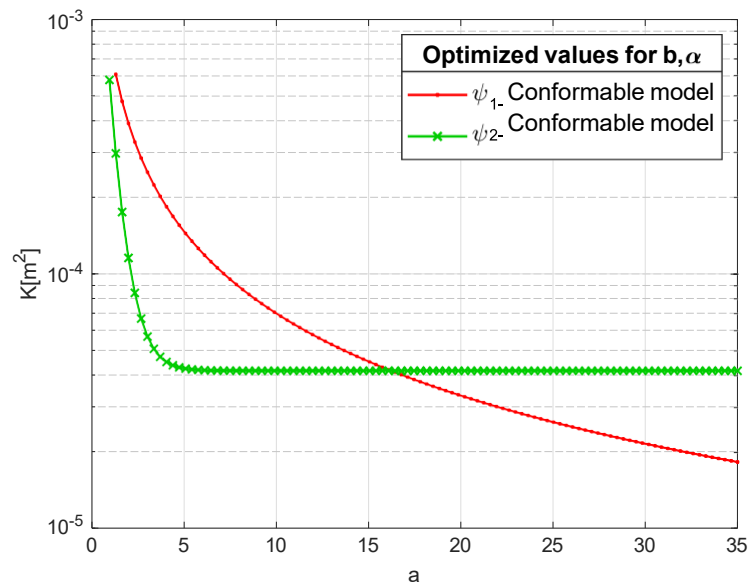


Figura 3.7: $K = K(a)$

Respecto al análisis de b , manteniendo constantes a y α , se observa la Fig.3.8. Conforme b incrementa, la permeabilidad decrece, mostrando menores magnitudes de permeabilidad el modelo con ψ_1 .

Finalmente, en la Fig.3.9 se presenta la variación de la permeabilidad respecto al exponente fraccionario α . En la cual, la permeabilidad aumenta conforme el parámetro aumenta en el modelo ψ_1 , mientras que para el modelo ψ_2 el comportamiento inverso, ambos modelos llegan al valor límite $K = 8.33 \times 10^{-4} m^2$ (Ec.(3.11)) cuando $\alpha \rightarrow 1$

Los resultados permiten establecer una relación entre la derivada conformable espacial y las características geométricas del sistema, ya que los parámetros conformables están directamente relacionados con la permeabilidad del medio y la cantidad de fluido que atraviesa el sistema, otorgándole a la derivada conformable el potencial de describir la transformación de un espacio vacío a uno que tiene apariencia de medio poroso.

En el trabajo de Li y colaboradores [66] existe una interpretación de la derivada fraccionaria en el gradiente, la divergencia y el Laplaciano, en la que establecen que "...el espacio métrico es transformado a una métrica efectiva a través del exponente fraccionario α ". Esta interpretación

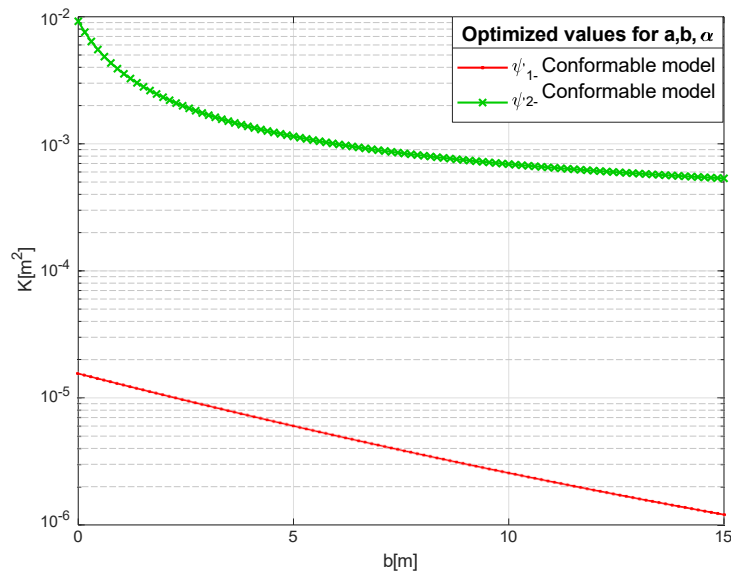


Figura 3.8: $K = K(b)$

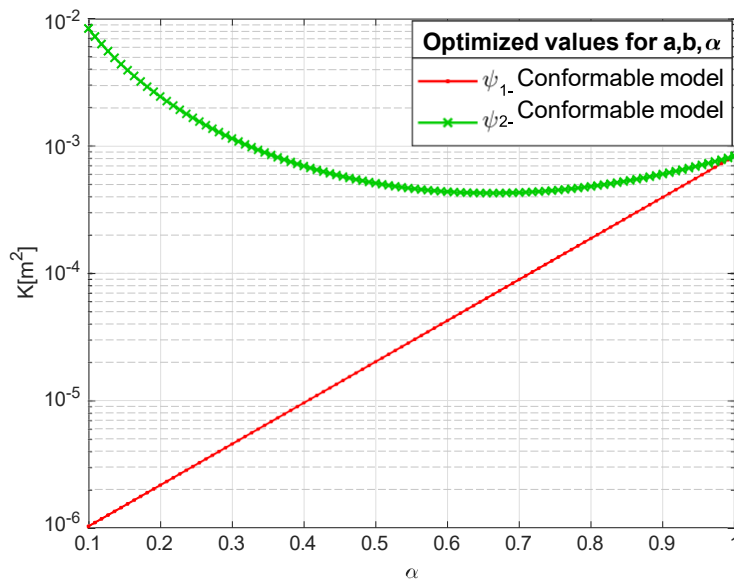


Figura 3.9: $K = K(\alpha)$

puede extenderse al modelo conformable y sugerir que los parámetros son una forma de establecer esa nueva métrica para medir el espacio.

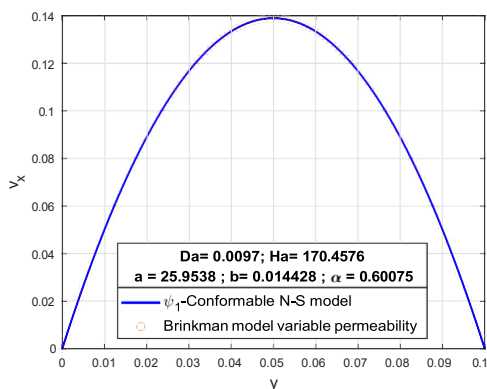
Adicionalmente, una interpretación del parámetro b puede establecerse debido a su análisis dimensional en ψ_1 y efecto en la permeabilidad. Podría estar relacionado a una longitud característica del medio poroso, por ejemplo, el inverso de la distancia que separa los sólidos de la matriz del medio, por ejemplo, en un medio poroso formado por un arreglo de cilindros sólidos,

entre menor sea la separación de los cilindros, hay menor espacios vacíos y por tanto, la permeabilidad es menor. Esta idea es observada en la Fig.3.8, en donde la permeabilidad decrece conforme b incrementa, ya que al aumentar el parámetro, menor espacio vacío.

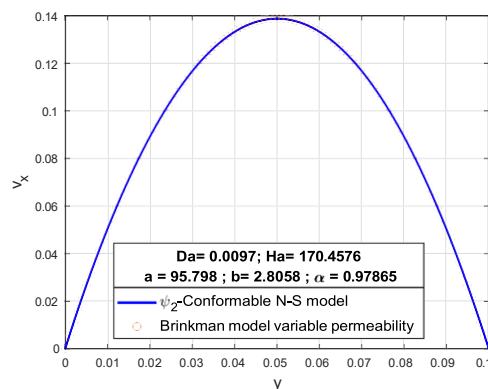
Una vez analizadas todas las características del modelo conformable en relación al medio poroso descrito por la ecuación de Brinkman con permeabilidad constante, se hará referencia a lo que sucede cuando la permeabilidad es variable.

3.2.3. Modelos Conformables describiendo el modelo de Brinkman con permeabilidad variable

Los perfiles de velocidad del modelo de Brinkman con permeabilidad variable parecen más simples que los de los modelos conformables, sin embargo en el modelo de medio poroso es necesario seleccionar las características del medio, la función de permeabilidad y generalmente una propuesta de perfil parabólico para obtener la solución de la Ec.(3.7), mientras que en el modelo conformable solamente se requiere la información de los parámetros. Para realizar la comparación entre los modelos conformables y el modelo de Brinkman se utiliza el mismo método de optimización para los parámetros (Ver Apéndice A). Para este caso se incluye un valor distinto del cociente de la viscosidad clásica y efectiva ($\mu_e = 0.6048\mu$) basada en los trabajos de Neale y otros [67, 68], este valor es ampliamente usado en materiales denominados *metal foams*, que son medios porosos de aluminio o metales con baja densidad.



(a) Modelo ψ_1 con parámetros ajustados



(b) Modelo ψ_2 con parámetros ajustados

En las Figs.3.10a-3.10b se muestran los perfiles de velocidad de los modelos conformables con parámetros optimizados, los cuales describen con precisión el modelo de Brinkman con permeabilidad variable con $Da=9.7 \times 10^{-3}$ y $Ha=170.45$. Con base en los resultados mostrados en las Tablas 3.3-3.4, se define el intervalo de validez del modelo está dado en el intervalo de $9.7 \times 10^{-5} \geq Da \leq 1$, en los que se muestra un porcentaje de error menor al 5%.

En el caso del flujo volumétrico, ambos modelos conformables son precisos como se observa en la Fig. 3.11. A diferencia del modelo con permeabilidad constante, en este caso el modelo con ψ_2 muestra menor absoluto ($\max.\text{abs.error}=7.5 \times 10^{-3}$) que el modelo con ψ_1 , que presenta un

Tabla 3.3: Valores óptimos de los parámetros conformables en ψ_1 para diferentes valores de permeabilidad

Da	a	b (1/m)	α	Max.Abs.Error	%error	Ha
0.97	0.738	0.007	0.489	1.12×10^{-4}	0.0035	106.281
0.097	40.606	0.008	0.939	1.11×10^{-4}	0.0092	1.06×10^4
9.7×10^{-3}	46.5536	0.014	0.6615	5.07×10^{-5}	0.029	1.06×10^6
9.7×10^{-4}	44.155	0.075	0.360	5.04×10^{-5}	0.32	1.06×10^8
9.7×10^{-5}	56.230	1.337	0.166	1.27×10^{-4}	1.06	5.36×10^{10}
9.7×10^{-6}	44.945	33.805	0.332	1.39×10^{-4}	86.78	1.06×10^{12}

Tabla 3.4: Valores óptimos de los parámetros conformables en ψ_2 para diferentes valores de permeabilidad

Da	a	b (1/m)	α	Max.Abs.Error	max. % error	Ha
0.97	0.0037	29.2782	0.8887	4.1×10^{-3}	2.22	106.281
0.097	99.506	0.53	0.985	1.5×10^{-3}	0.0739	1.06×10^4
9.7×10^{-3}	95.798	2.806	0.979	3.93×10^{-4}	0.14	1.06×10^6
9.7×10^{-4}	14.404	13.568	0.7570	2.69×10^{-4}	0.88	1.06×10^8
9.7×10^{-5}	59.378	41.662	0.878	5.49×10^{-5}	2.51	1.06×10^{10}

error absoluto máximo de 0.03.

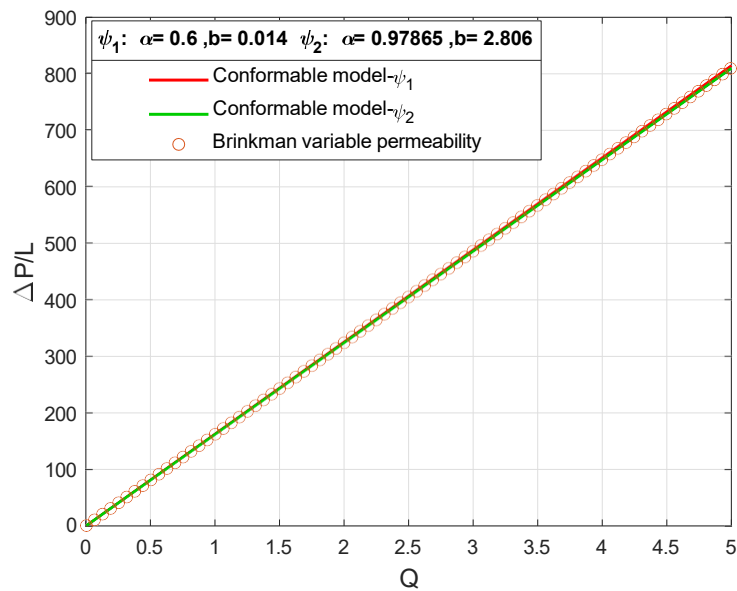


Figura 3.11: Flujo volumétrico obtenido con los modelos conformables y el modelo de Brinkman con K variable

3.3. Modelo fraccionario de Caputo comparado con los modelos conformables y el medio poroso

En esta sección se compara el desempeño de los modelos conformables con un modelo fraccionario, empleando la derivada de Caputo, con la finalidad de analizar si los modelos conformables presentan ventajas respecto a un modelo fraccionario.

La derivada de Caputo es un operador de orden no entero clásico, de los más estudiados en el cálculo de orden no entero, ya que presenta algunas ventajas respecto a otra de las derivadas clásicas como la de Riemann-Liouville [69]. Con la finalidad de comparar los modelos conformables con un operador fraccionario se define a la derivada de Caputo espacial. Se considera a una función $f(x) \in \mathbb{R}$, la cual tiene derivadas hasta de orden $n - 1$ en $[a, b]$, por lo que la derivada de Caputo de orden β está definida como [70]:

$${}^c D_{\alpha^+}^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x - t)^{\beta+1-n}}, \quad (3.13)$$

para $\beta > 0$, $n = \beta + 1$. Donde $f^{(n)}(x)$ es la n -ésima derivada de la función $f(x)$ y $\Gamma(1 - \beta)$ es la función Gamma, representada por:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\Re(z) > 0),$$

en la que la integral es convergente para todo el plano $z \in \mathbb{C}$ [70].

Una vez definida la derivada es incluida en el modelo simplificado de N-S, obteniendo:

$${}^c D_{v_{xF}}^\beta (y) = - \frac{1}{f} \frac{dP}{dx}, \quad (3.14)$$

para $1 \leq \beta \leq 2$, y v_{xF} la velocidad en el modelo fraccionario.

Realizando el análisis dimensional, se debe incluir un parámetro que de consistencia dimensional a la ecuación, por lo que se define σ^β y se incluye en el modelo a través de la viscosidad $\mu_f = \mu/\sigma^\beta$. Con esta definición se obtiene una ecuación con las dimensiones clásicas de las de N-S. La EDO se resuelve a través del método de transformada de Laplace [70] para obtener:

$$v_{xF}(y) = - \frac{1}{f} \frac{dP}{dx} \frac{y^{\beta-1} - h^{\beta-1}}{\Gamma(\beta + 1)}, \quad (3.15)$$

tal que el modelo de orden entero es recuperado cuando $\beta = 2$.

La expresión para el flujo volumétrico está definida por

$$Q_F = - \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \frac{(1-\beta)h^{\beta+1}}{2(\beta+1)\Gamma(\beta+1)} \quad (3.16)$$

Respecto a una expresión para la permeabilidad, se sigue la metodología descrita en la Sec. 3.2.2.1, se obtiene:

$$K_F = \frac{(\beta-1)h^{\beta+1}}{2(\beta+1)\Gamma(\beta+1)} \quad (3.17)$$

Mediante las ecuaciones (3.16)-(3.17) se aprecia que tanto el flujo volumétrico como la permeabilidad dependen de la longitud característica h y el exponente fraccionario β .

Una vez obtenidas las expresiones de perfil de velocidad, flujo volumétrico y permeabilidad fraccionarias, es importante optimizar el valor del exponente β y comparar este modelo con los conformables.

3.3.1. Modelos de orden no entero describiendo el flujo a través del medio poroso con permeabilidad constante

Para conocer el valor óptimo del exponente β del modelo fraccionario, se realiza el proceso de optimización también empleado en los casos conformables (Apéndice A). En la Fig.3.12 se presentan los perfiles de velocidad del modelo de Caputo (línea azul) optimizado, de los modelos conformables optimizados y del modelo de Brinkman (marcadores amarillos). Para el modelo fraccionario se obtiene un valor óptimo de $\beta = 1.0173$, el cual se acerca más a la primera derivada, lo cual sugiere que la ecuación diferencial definiría que el gradiente de velocidad es proporcional al gradiente de presión.

Por otro lado, los modelos conformables muestran un perfil parabólico que se acerca más al del medio poroso que el modelo fraccionario, el cual presenta un perfil no simétrico.

Respecto al flujo volumétrico, se muestra la Fig.3.13, en la cual se observan a los modelos de orden no entero y al modelo de Brinkman con permeabilidad constante. A diferencia del perfil de velocidad, el flujo volumétrico puede ser descrito con precisión por el modelo fraccionario, con un error absoluto máximo de 1.09. Dentro de los modelos de orden no entero, el modelo ψ_1 es el que describe con mayor precisión al flujo volumétrico, mostrando un error absoluto máximo de 0.55, mientras que el modelo con ψ_2 presenta un valor máximo de error absoluto igual a 14.

El modelo fraccionario no muestra un buen desempeño al describir el perfil de velocidad, sin embargo es una buena aproximación para describir el flujo volumétrico en un medio poroso. Este comportamiento coincide con los resultados encontrados por Chang y colaboradores [71], en los cuales definen que la ley de Darcy con una derivada fraccionaria espacial es capaz de describir

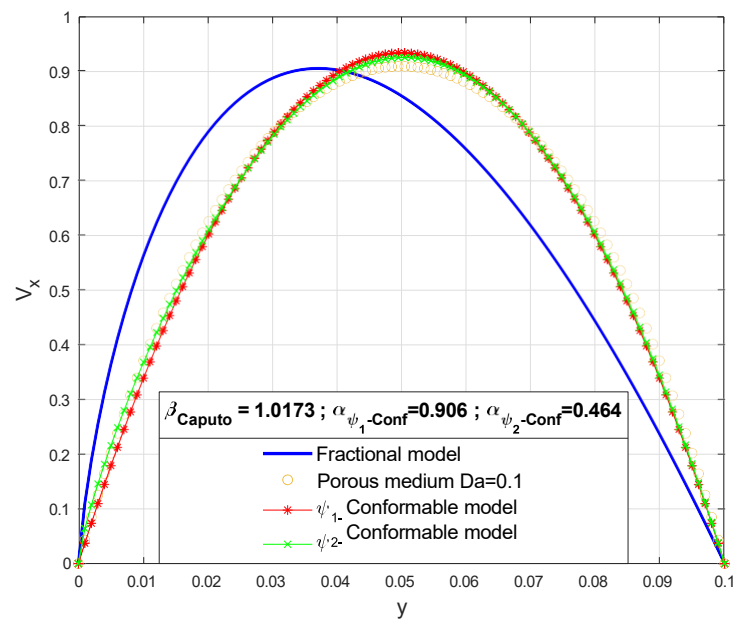


Figura 3.12: Modelos de orden no entero comparados con el modelo de Brinkman $Da=0.1$

eficientemente la filtración de un fluido a través de un medio de baja permeabilidad, sugiriendo que el orden fraccionario de la derivada puede estar relacionado con la estructura y propiedades del medio.

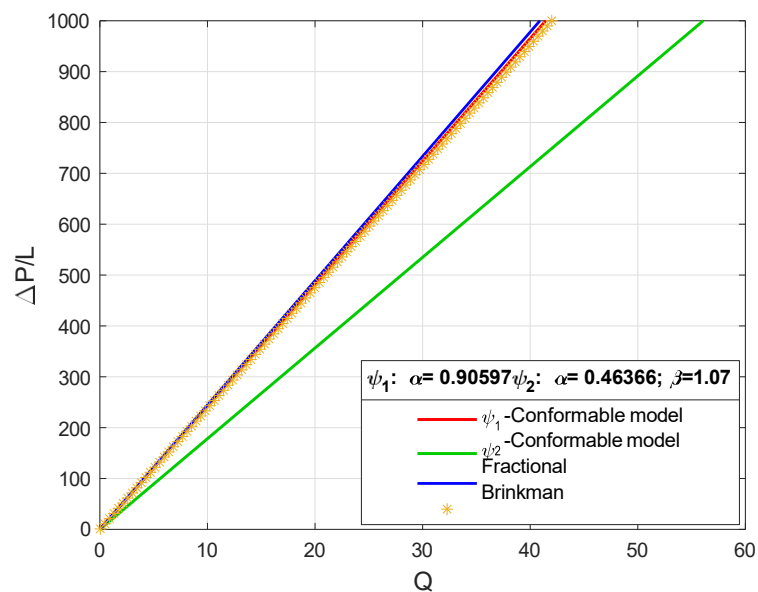


Figura 3.13: Modelos de orden no entero comparados con Brinkman de permeabilidad constante

3.3.2. Modelos de orden no entero describiendo el flujo a través del medio poroso con permeabilidad variable

Por lo que se refiere al modelo de permeabilidad variable también se realiza una comparación entre los modelos de orden no entero. El modelo fraccionario es nuevamente optimizado para obtener el valor de β que mejor ajuste al modelo de medio poroso con $Da=0.0097$. En la Fig.3.14 se presentan los perfiles de velocidad, en los cuales se repite el comportamiento mostrado en el caso de permeabilidad constante, en donde el modelo fraccionario no es una buena aproximación a la función de la velocidad.

El valor optimizado del exponente fraccionario es $\beta = 1.0025$ y nuevamente muestra un perfil parabólico no simétrico, ajustándose con mayor precisión los modelos conformables.

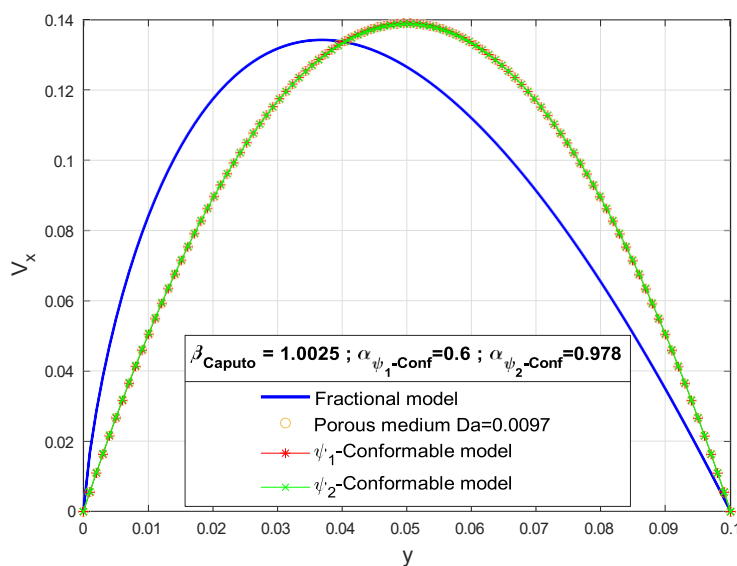


Figura 3.14: Perfiles de velocidad de orden no entero comparados con el modelo de Brinkman de K variable

En la Fig.3.15 se muestran a los flujos volumétricos como función del gradiente de presión, en donde todos los modelos de orden no entero son capaces de describir el flujo a través de un medio poroso con permeabilidad variable. El modelo conformable- ψ_2 es el que presenta el menor error absoluto (7.5×10^{-3}), posteriormente el modelo conformable con un error máximo de 0.023 y finalmente el modelo fraccionario con un error de 0.031.

Con base en los resultados es posible decir que los modelos conformables son mejor opción para representar a los perfiles de velocidad a través de medios porosos, ya sea con permeabilidad constante o variable. Sin embargo, el modelo fraccionario es capaz de reproducir con mejor precisión que el ψ_2 al flujo volumétrico para un medio de permeabilidad constante.

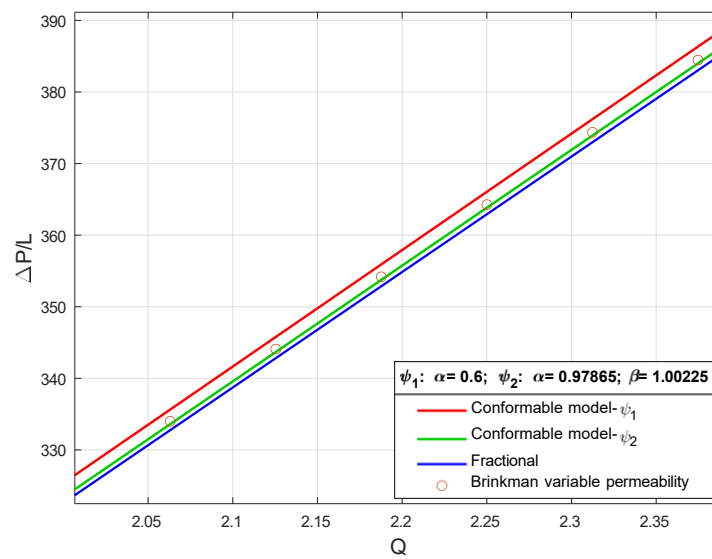


Figura 3.15: Flujo volumétrico de orden no entero comparados con el modelo Brinkman con K variable

A pesar de presentar alguna ventaja respecto al modelo conformable con ψ_2 , en conjunto, los modelos conformables muestran una mejor descripción de los perfiles de velocidad y flujo volumétrico en medios porosos para los intervalos de número de Darcy mencionados en las Tablas 3.1-3.4.

Capítulo 4

Factor de fricción conformable como modelo unificado de algunos medios porosos

En este capítulo se analiza el impacto de la derivada conformable en una variable de diseño básica en la ingeniería: el factor de fricción. Primero se presentan a los factores de fricción de los modelos clásicos, posteriormente se define a una derivada conformable adicional, ya definida con base en la habilidad de los modelos conformables de definir flujos a través de medios porosos para finalmente compararlos y proponer un factor de fricción generalizado a través de las derivadas conformables, capaces de describir el flujo a través de medios porosos.

4.1. Factor de fricción para flujo laminar

El factor de fricción es un número adimensional que relaciona la caída de presión y la resistencia a la velocidad del fluido (Ec.(4.1)), ampliamente utilizado en ingeniería, que sirve para estimar pérdidas de energía y presión a través de tuberías y espacios confinados, para evaluar las características del flujo de un fluido como la velocidad promedio y el flujo volumétrico [43], para analizar la transición del régimen de un flujo debido a la rugosidad de las paredes [72], por mencionar algunas aplicaciones.

$$f = \frac{-(dP/dx)D_h}{\rho V^2/2}, \quad (4.1)$$

donde dP/dx es el gradiente de presión, D_h el diámetro hidráulico, V la velocidad promedio y ρ la densidad del fluido.

Las relaciones que definen al factor de fricción generalmente dependen del número de Reynolds (Re), cuando el flujo es laminar, y adicionalmente de la rugosidad para los fluidos en régimen de transición o turbulento. Para obtener una forma en términos del Re es indispensable conocer el perfil de velocidad y la velocidad promedio, de la cual se despeja el gradiente de presión y se sustituye en la Ec. (4.1). Particularmente para el flujo de Poiseuille empleado en esta investigación, la forma del factor de fricción en régimen laminar toma la forma:

$$f = \frac{4}{\text{Re}}, \quad (4.2)$$

mientras que para el flujo en una tubería se expresa como:

$$f_{\text{pipe}} = \frac{6}{\text{Re}}. \quad (4.3)$$

La diferencia entre la Ec.(4.2) y la Ec.(4.3) es la constante en el numerador, la cual está relacionada con la longitud característica del espacio confinado (diámetro hidráulico como longitud que ajusta o corrige la definición del factor de fricción).

La relación entre estos dos números adimensionales se representa en un diagrama log-log, también llamado diagrama de Moody, empleado para evaluar su relación, así como definir que en flujos turbulentos, existe una variable adicional de la cual depende el factor de fricción, la rugosidad ϵ [43]. En la Fig.4.1 se muestra un diagrama clásico de Moody, en el que el flujo laminar se observa como una recta con pendiente negativa, mientras que el flujo turbulento muestra diferentes curvas de acuerdo a la relación entre la rugosidad y la longitud característica del sistema (d) [43]. Para los cálculos de la zona turbulenta se empleó una de las correlaciones más aceptadas, definida por Colebrooke [43]:

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon/d}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} f^{1/2}} \right). \quad (4.4)$$

Conforme más alta sea la relación de rugosidad ϵ/d más alto el factor de fricción, mientras que la curva se suaviza a valores pequeños de rugosidad (material es casi liso).

Este trabajo se enfoca en la zona laminar, ya que las ecuaciones conformables son lineales y no tienen la habilidad de describir fenómenos no lineales en esa forma simplificada. También debido a que el factor de fricción para flujo laminar está definido por una única correlación con el Re, mientras que en la zona turbulenta existen varias correlaciones con diferentes intervalos de aplicación de Re; como las de Nikuradse, Prandtl-Von Karman, Moody, por mencionar algunas [73].

Una vez abordadas las generalidades del factor de fricción en medios homogéneos (donde no hay obstrucciones u obstáculos), se analiza lo que ocurre en medios porosos.

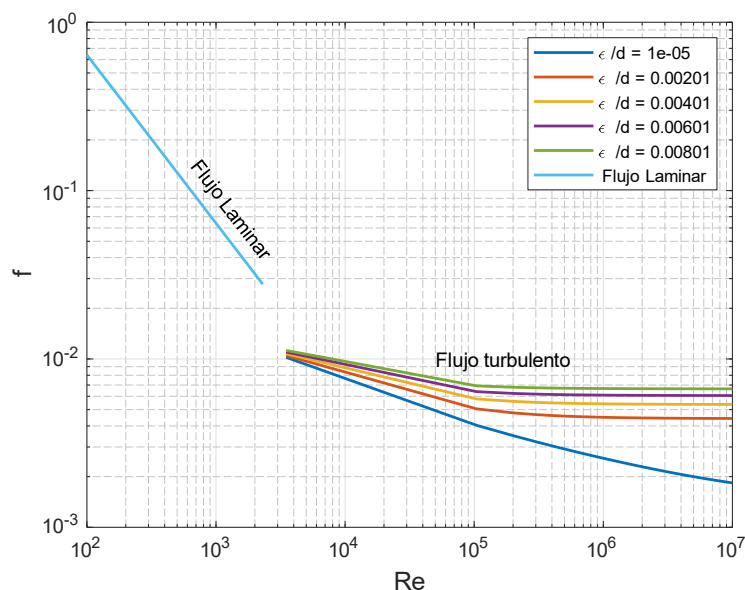


Figura 4.1: Diagrama de Moody

4.1.1. Factor de fricción en medios porosos

Las correlaciones que definen al factor de fricción en medios porosos incluyen características geométricas del medio, así como el tipo de flujo (Darciano o No-Darciano).

Para clasificar el tipo de flujo se toma como referencia a la ley de Darcy, en la que se define una relación lineal entre la velocidad del fluido y el gradiente hidráulico. Los flujos No Darcianos muestran relaciones no lineales, como la ecuación de Forchheimer que presenta una relación cuadrática [74, 75]. A partir de esa clasificación y de las características de la matriz sólida; como la forma, tamaño, superficie; se han definido diferentes números de Reynolds para los medios porosos y por consiguiente múltiples correlaciones para el factor de fricción. El trabajo de Ergun es uno de los primeros en considerar la forma y tamaño de los sólidos que conforman al medio y proponer un factor de fricción que incluya estas consideraciones [76]. Por otro lado, Yazdchi y colaboradores realizan una compilación de factores de fricción en sistemas que incluyen efectos no lineales [77, 78].

Para ilustrar las múltiples expresiones de Re y de factores de fricción que pueden existir para los medios porosos, se incluye la Tabla 4.1, en donde se muestran algunas formas típicas para flujos Darcianos y no Darcianos. En estas expresiones se emplean diferentes expresiones para el número de Re, en el cual se sustituye la longitud característica del sistema (como el diámetro de una tubería) por una longitud que caracterice al medio poroso. Es por ello que al número de Re se le agrega un subíndice, el cual hace referencia a dicha longitud.

A partir de los ejemplos señalados en la Tabla 4.1, se vislumbra que en medios porosos existe

Tabla 4.1: Factores de fricción en medios porosos

Factor de fricción	Re	Comentarios
$\frac{1}{\text{Re}_k}$ [79]	$\text{Re}_k = \frac{\rho V K^{1/2}}{\mu}$	LD, K es la permeabilidad, $\text{Re} \leq 100$
$\frac{8}{U_m \text{Re Da}}$ [80]	$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu}$	LD, D el diámetro, $\text{Da} = K/Ro^2$ el número de Da, U_m la velocidad promedio adimensional de Brinkman
$\frac{1-\epsilon}{\epsilon^3} \frac{150}{\text{Re}_p} + 1.75$ [76]	$\text{Re}_p = \frac{D_p \rho V}{\mu}$	LND $D_p = d/(1-\epsilon)$ diámetro efectivo, $\epsilon < 0.8$ (porosidad)
$\frac{1}{\text{Re}_k} + \beta$ [79]	$\text{Re}_k = \frac{\rho V K^{1/2}}{\mu}$	LND (basado en Forcheimer), $\text{Re} \leq 1000$
$\frac{96}{\text{Re}_D} [1 + c_1 (\frac{a}{e_h})^{1.1172}]$ [81]	$\text{Re}_D = \rho V D_h / \mu$	LD/LND (para fracturas en rocas), D_h apertura hidráulica, $\text{Re} \leq 10$
$**f' = \frac{d^2}{K} + \gamma \text{Re}_d^\lambda$ [77]	$\text{Re}_d = \rho V d / \mu$	LND, d diámetro de la partícula (generalización de Forchheimer), $\text{Re} < 30$

LD= flujo Laminar Darciano (lineal), LND= flujo Laminar Non-Darciano

$$**f' = f \text{Re}_d$$

la dificultad de elegir un factor de fricción adecuado, que sea capaz de incluir características del medio y del tipo de flujo. Adicionalmente, el rango de aplicación de cada expresión depende de la definición del Re, el cual también presenta rangos completamente distintos de acuerdo a longitud característica seleccionada.

Es aquí donde los modelos conformables identificados para describir el flujo a través de medio poroso pueden servir para unificar a la familia de correlaciones de factores de fricción en régimen laminar Darciano. Previo a probar esta hipótesis, se decide diseñar una función conformable con la información obtenida en el capítulo anterior, pero con una forma que se asemeje a la permeabilidad.

4.2. Nuevo modelo conformable basado en un parámetro de los medios porosos

Los resultados del Capítulo 2 evidencian que la derivada conformable dentro del modelo simplificado de N-S es capaz de describir el flujo a través de medios porosos, con la finalidad de analizar el alcance de una función conformable que tenga un diseño basado en alguna propiedad del medio poroso, se define una nueva función que tome en cuenta estos resultados. Se toma como inspiración algunas funciones para la permeabilidad y a partir de la forma de esas funciones se define a ψ_3 .

4.2.1. Nueva función conformable $\psi_3(y, \alpha)$

La permeabilidad en medios porosos puede ser función del espacio, la porosidad, entre otras características del medio. Las funciones tomadas como referencia para la nueva función fueron presentadas por Rodríguez y colaboradores [82], en la Ec.(4.5), y por Costa [83] en la Ec.(4.6)

$$K = \phi^{n+1}/C(1 - \phi)^n, \quad (4.5)$$

y

$$K = C\phi^n/(1 - \phi), \quad (4.6)$$

donde ϕ representa a la porosidad.

Las expresiones para la permeabilidad expresadas en Ecs.(4.5)-(4.6), son una modificación o generalización de la correlación dada por Kozeny-Carman (KC), incluyendo las micro estructuras del material poroso, tal como el diámetro de poro y la geometría fractal [84].

Respecto a su forma matemática, ambas son funciones racionales, con diferentes monomios para la porosidad. Considerando estas permeabilidades, se define a la nueva función conformable como:

$$\psi_3(y, \alpha) = \frac{(1 + yb)^{\alpha(\alpha-1)}}{(yb)^{1-\alpha}}, \quad (4.7)$$

donde a es un parámetro adimensional, α el exponente fraccionario y b un parámetro con dimensiones $[L^{-1}]$. La función $\psi_3 : (\mathbb{R} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, donde $a, b \geq 0$ y $0 \leq \alpha \leq 1$.

Para ilustrar el comportamiento de esta nueva función, se presenta la Fig.4.2, con valores fijos para $a = 15$, $b = 1.5$ y distintos valores de α . Las características básicas de las funciones conformables definidas en las Ecs.(1.11)-(1.13) son representadas, incluyendo $\psi_3(y, 1) = 1$. El comportamiento de esta función es decreciente respecto a la posición y respecto a α , en la siguiente sección se hace el análisis dentro del modelo de flujo seleccionado.

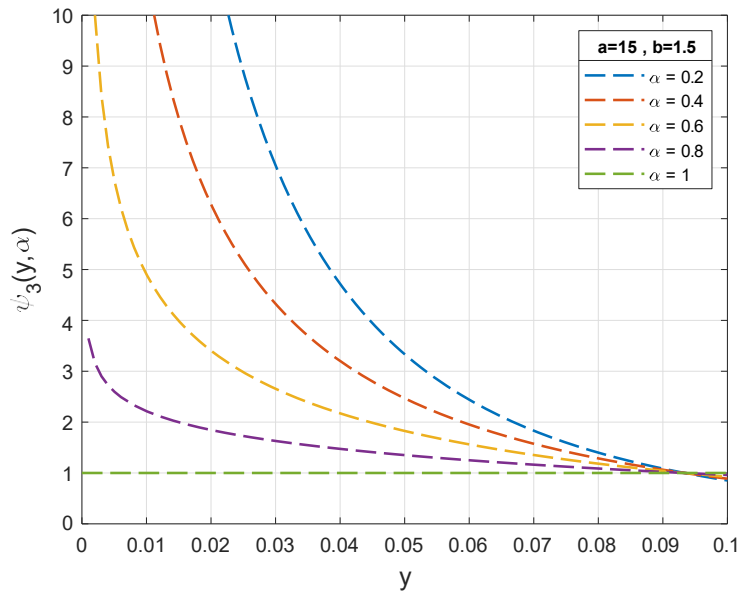


Figura 4.2: Función conformable $\psi_3(y, \alpha)$

4.2.2. Modelo conformable- ψ_3 para flujo a través de dos placas paralelas

Una vez definida la función conformable, se incluye la derivada dentro del flujo de Poiseuille, definido en la Sec.1.3.1, obteniendo un modelo conformable expresado como:

$$\frac{d}{d} \frac{(1+yb)^{\alpha(a-1)}}{(yb)^{1-\alpha}} \frac{dv_x}{d} = -\frac{1}{\mu} \frac{(yb)^{1-\alpha}}{(1+yb)^{\alpha(a-1)}} \frac{dp}{dx}, \quad (4.8)$$

donde dp/dx es el gradiente de presión, el cual se sigue considerando constante, μ la viscosidad del fluido, y v_x la velocidad. Tal como en los modelos previos, la ecuación diferencial se mantiene ordinaria y lineal.

Comparando el modelo de la Ec.(4.8) con la Ley de Darcy con permeabilidad como función de la porosidad (Ec.(4.9)), se encuentran similitudes en la estructura que multiplica al gradiente de presión (lado derecho de la ecuación), lo cual permite realizar una comparación explícita entre el modelo de orden no entero y el de medio poroso, justificando el uso y definición de ψ_3 .

$$V = -\frac{1}{\mu} \frac{\phi^{n+1}}{(1-\phi)^n} \frac{dp}{dx}. \quad (4.9)$$

Asimismo, esta similitud sugiere la relación directa entre el modelo conformable y la estructura del medio poroso.

Una vez definido el nuevo modelo conformable, se resuelve considerando condiciones de frontera de no deslizamiento ($v_x(y=0) = 0$, $v_x(y=h) = 0$), obteniendo:

$$v_{x\psi_3} = \frac{1}{\mu(\alpha - dx)} \frac{dp}{dx} \left(\frac{y(yb)^{2(1-\alpha)} {}_2F_1(A_3; B_3; z)}{(1+yb)^{\alpha(\alpha-1)}} dy - C_1 y(yb) {}_2F_1(A; B; z) \right)^{1-\alpha}, \quad (4.10)$$

donde $A_3 = 2 - \alpha$, $a(\alpha - 1)$, $B_3 = 3 - \alpha$, $z = -by$, y ${}_2F_1(e, f, z)$ es la función Hipergeométrica, definida como [85]:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} e, f \\ g \end{matrix}; z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e)_n (f)_n z^n}{(g)_n n!},$$

la cual está definida a partir de los símbolos de Pochhammer, los cuales se expresan como:

$$(k)_n = \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k)}, \quad n \leq 0,$$

donde $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ ($\Re(z) > 0$) representa a la función Gamma, la cual es una generalización al plano complejo de las funciones factoriales [70].

La función Hipergeométrica evaluada en $\alpha = 1$ se convierte en ${}_2F_1(1, 0; 2; -by) = 1$, por lo que la solución clásica se recupera.

Esta solución incluye funciones especiales que los modelos conformables ψ_1 y ψ_2 no muestran, sin embargo, sigue siendo una solución analítica que se obtiene con métodos clásicos de EDOs. Su evaluación fue ligeramente más complicada que la de las otras derivadas conformables, para facilitar el proceso se recurre a un método numérico de solución de ecuaciones diferenciales en Matlab (bvp4c), sin embargo la solución aproximada puede obtenerse a través de la expansión de la función hipergeométrica.

Para visualizar el perfil de velocidad se emplea la misma información para las constantes, $dp/dx = 1.5 \text{ Pa/m}$, $\mu = 0.0001 \text{ Pa s}$, $a = 0.8$ and $b = 1.5 \text{ m}^{-1}$. La Fig. 4.3 presenta los perfiles de velocidad como función de la posición y para diferentes valores del exponente fraccionario $0.2 \leq \alpha \leq 1$, empleando valores para $a = 0.8$, y $b = 1.5 \text{ m}^{-1}$. Los diferentes perfiles conformables, nuevamente tienen menor magnitud que el modelo clásico, el cual se recupera cuando $\alpha \rightarrow 1$, este comportamiento sugiere que el nuevo modelo conformable también puede representar al flujo a través de medios porosos.

Como en los casos para ψ_1 y ψ_2 es posible optimizar los valores para reproducir el flujo a través de medios porosos, sin embargo, este capítulo se enfoca en analizar el factor de fricción como el definido en la Ec. (4.2). Para comenzar dicho análisis es importante comenzar con la velocidad promedio (Ec.(4.11)), de dicha expresión se extrae el gradiente de presión para sustituirlo en el

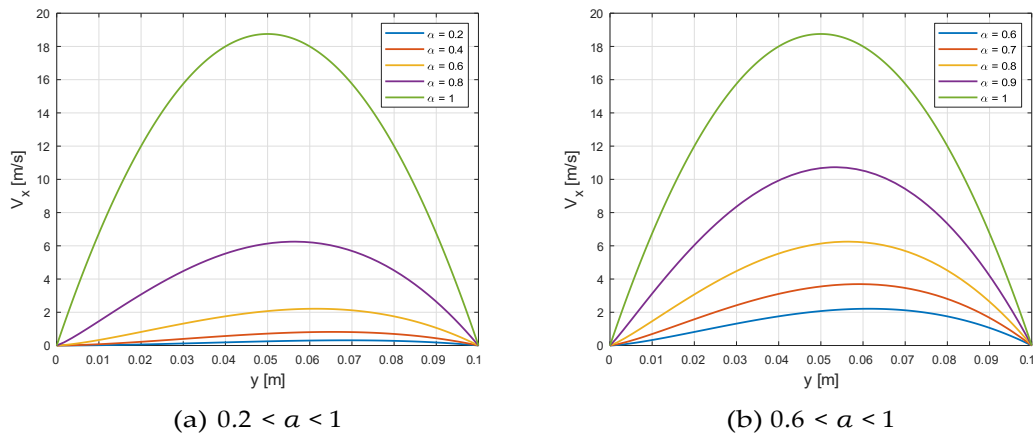


Figura 4.3: Perfiles de velocidad para el modelo conformable- ψ_3

factor de fricción.

$$V = \frac{1}{\mu h(\alpha - 2)} \frac{dp}{dx} \int_0^h \frac{y(yb)^{2(1-\alpha)} {}_2F_1(A_3; B_3; z)}{(1+yb)^{\alpha(\alpha-1)}} dy - C_1 \int_0^h \frac{y(yb)^{1-\alpha} {}_2F_1(A; B; z)}{y(yb)^{1-\alpha}} dy, \quad (4.11)$$

4.2.3. Factor de fricción conformable

Para obtener el factor de fricción es indispensable conocer el gradiente de presión (dp/dx) en términos de la velocidad promedio ($V = Q/A$). Para el caso del modelo conformable- ψ_3 puede expresarse como:

$$f_\psi = \frac{4h(2-\alpha)}{\text{Re } g(y, a, b, \alpha)}, \quad (4.12)$$

donde h representa a la separación entre las placas y $g(y, a, b, \alpha)$ es un función que contiene la información de la velocidad promedio, definida por:

$$g(y, a, b, \alpha) = \int_0^h \frac{y(yb)^{2(1-\alpha)} {}_2F_1(A; B; z)}{(1+yb)^{\alpha(\alpha-1)}} dy + C_1 \int_0^h \frac{y(yb)^{1-\alpha} {}_2F_1(A; B; z)}{y(yb)^{1-\alpha}} dy.$$

Para $(a, b, \alpha) \in \mathbf{R}^+$, la función Hipergeométrica es positiva y bien definida. Cuando $\alpha = 1$ se recupera la expresión clásica del factor de fricción dado en la Ec.(4.2).

Para evaluar la función $g(y, a, b, \alpha)$ en la Ec.(4.12), se llevó a cabo un método numérico de integración (trapecio). En la Fig.4.4 se muestran los resultados de la evaluación, en donde el factor de fricción se expresa como función del número de Re, en un diagrama tipo Moody, para diferentes valores de α . El cual está dado para un rango de $1 < f_\psi(\text{Re}, \alpha) < 10^{10}$, para valores de $0.7 \leq \alpha \leq 0.9$ y $10^{-3} \leq \text{Re} \leq 100$. Conforme el valor de α decrece, el factor de fricción incrementa y cuando $\alpha = 1$ se observa la expresión límite para el modelo clásico, estos resultados sugieren que α puede interpretarse como un factor que escala la magnitud del factor de fricción.

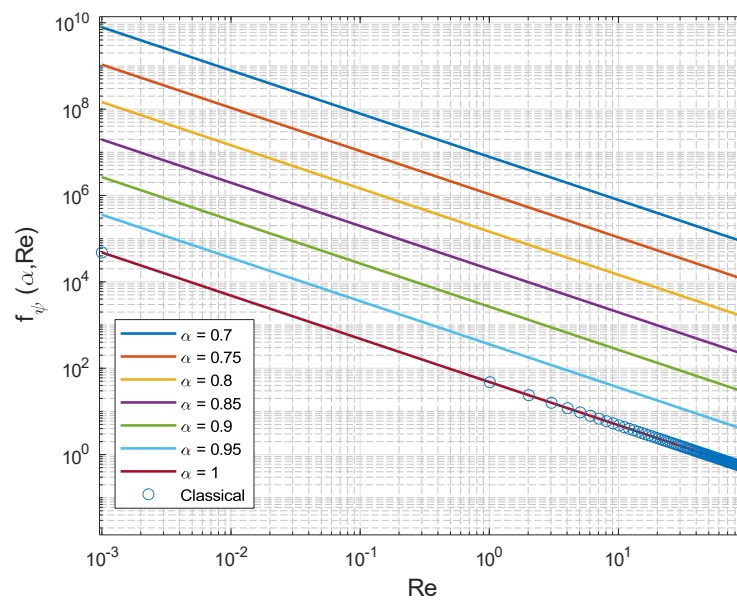


Figura 4.4: Factor de fricción conformable- $\psi/3$

Una vez obtenida la expresión para este número adimensional, se realiza la comparación entre éste y los factores de fricción de los medios porosos para flujos Darcianos.

4.3. Factor de fricción conformable como modelo unificado para medios porosos

Para proponer al factor de fricción conformable como un modelo unificado para medios porosos con flujos Darcianos, se requiere compararlo y obtener los valores óptimos de los parámetros respecto a los modelos clásicos para modelos de medio porosos. Por lo que en este capítulo se encuentran los intervalos en los que el modelo conformable es capaz de reproducir el flujo en medios porosos. Se inicia con los modelos clásicos de Darcy y Brinkman con permeabilidad constante, posteriormente se describe un modelo con permeabilidad variable y un modelo proveniente de ajustes experimentales que describe el flujo a través de una fractura en rocas.

4.3.1. Factores de fricción en medios porosos con permeabilidad constante y conformables

En la Tabla 4.1, se evidencia que la definición del número de Re es determinante para definir al fracción de fricción, así como para definir los intervalos de aplicación de cada expresión, por lo que resulta indispensable caracterizar bien el medio poroso y elegir con precaución el factor de fricción adecuado. Por otro lado, el modelo conformable únicamente requiere un proceso de optimización y un único número de Reynolds. Así pues, para realizar una comparación entre el modelo de orden no entero y los de medios porosos, se requiere encontrar una relación entre el

Re clásico y el definido para medios porosos. Empezando con el modelo de Darcy, se emplea el $Da = K/h^2$ para relacionar al Re_k con el Re , obteniendo un factor de fricción en términos del número adimensional clásico:

$$f_{Darcy} = \frac{1}{Re_k} = \frac{1}{Re \sqrt{Da}}. \quad (4.13)$$

En el caso del modelo de Brinkman con permeabilidad constante, se realizan los cálculos para obtener al factor de fricción directamente con el Re clásico, el cual toma la forma

$$f_{Brink} = \frac{4}{Re Da} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu \epsilon Da}{\mu}} \left(\frac{1 - \cosh\left(\sqrt{\frac{\mu}{\mu \epsilon Da}}\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{\mu}{\mu \epsilon Da}}\right)}\right)} \right). \quad (4.14)$$

Una vez que las expresiones para el factor de fricción pueden compararse, ya que se encuentran en términos de la misma variable independiente, se evalúan y grafican en la Fig.4.5, para un dominio de $0.1 \leq Re \leq 500$, el cual corresponde a $3.1 \times 10^{-4} \leq Re_k \leq 100$. Se elige ese intervalo de número de Reynolds basado en el valor en el que es válido el modelo de Darcy.

En la Fig.4.5 se muestran dos rectas para cada modelo de medio poroso, cada una de ellas representa a una permeabilidad de $K = 1 \times 10^{-5} m^2$ y $K = 5 \times 10^{-3} m^2$, con la finalidad de observar el comportamiento para diferentes sistemas. En cuanto al modelo conformable- ψ_3 se eligen valores arbitrarios de $a = 5$, $b = 0.15$ y $\alpha = 0.85$. Incluso empleando estos valores no optimizados, es posible observar que el modelo conformable- ψ_3 se encuentra en el rango de valores de f definido en los medios porosos. Esta primera visualización sugiere que con valores optimizados, el modelo conformable puede representar tanto al modelo de Darcy, como al de Brinkman en un intervalo definido de permeabilidades.

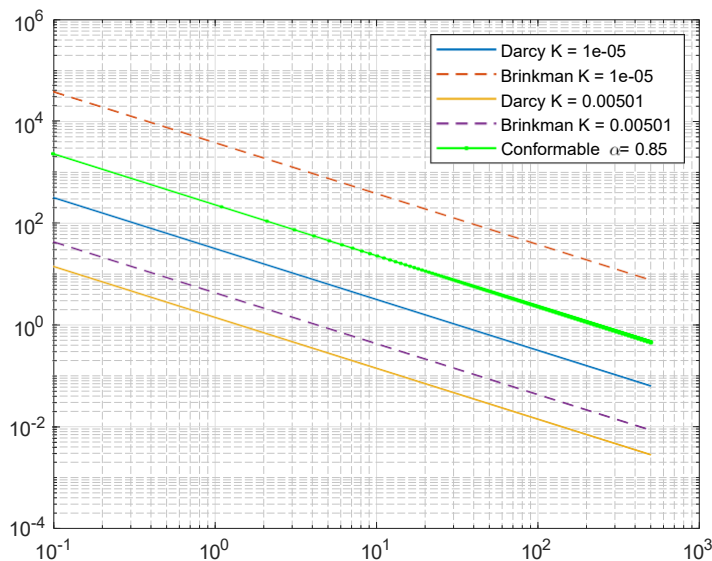


Figura 4.5: Factor de fricción conformable- ψ_3 comparado con los modelos porosos

Puesto que se visualiza que el factor de fricción conformable puede adherirse al comportamiento de un medio poroso, se realiza el proceso de optimización de los parámetros (ver Apéndice A) y se obtiene el intervalo en el que el modelo conformable funciona como una generalización para

flujos en r'egimen laminar Darciano. En la Tabla 4.2 se muestran los valores óptimos de a , b , α , tanto para el modelo de Darcy, como para el modelo de Brinkman con permeabilidad constante.

Tabla 4.2: Valores optimizados de a , b , α , en el intervalo $1 \times 10^{-5} \leq Da \leq 0.04$

Modelo de medio poroso	a	$b[1/m]$	α	$K [m^2]$
Darcy $3.1 \times 10^{-4} \leq Re_k \leq 100$	51.3	0.1952	0.91954	1×10^{-6}
	12.2189	0.6256	0.5354	1×10^{-8}
	1.09	0.1185	0.5005	1×10^{-10}
Brinkman $\mu = \mu_e$	49.879	49.7817	0.9799	5×10^{-3}
	44	0.30739	0.4203	5×10^{-4}
	0.10779	0.23419	0.19425	5×10^{-7}

Con base en los resultados de la optimización, se establece el intervalo de Da en el que los errores entre el modelo conformable y los de medios porosos no excede el 10 %. Se muestran los valores de permeabilidad correspondientes, observando que para el modelo de Darcy las permeabilidades son más bajas ($1 \times 10^{-12} \leq K \leq 1 \times 10^{-6}$) que para el de Brinkman $5 \times 10^{-7} \leq K \leq 1 \times 10^{-3}$. Conforme la permeabilidad aumenta, también se observa un aumento general en los valores de los parámetros, lo que sugiere una relación entre las características del medio poroso y los parámetros del modelo conformable.

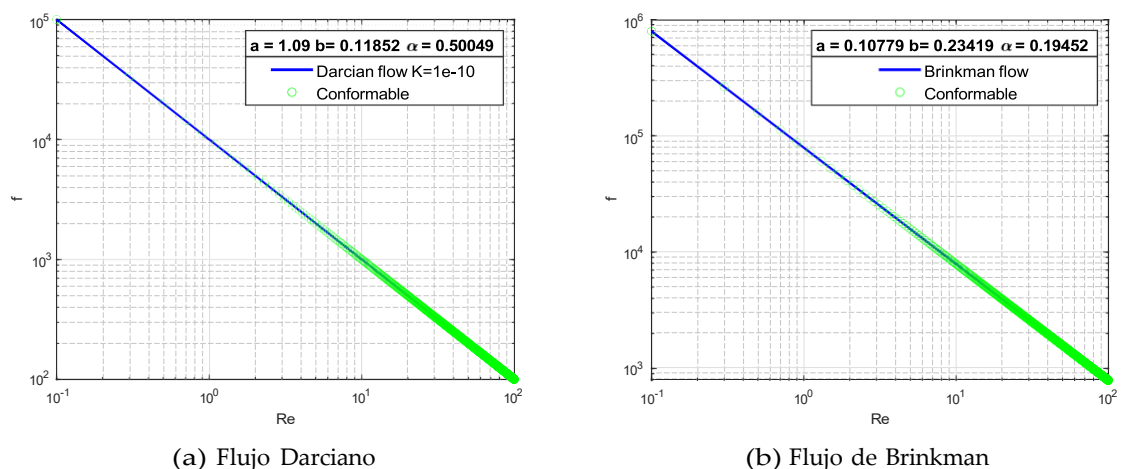


Figura 4.6: Valores optimizados de a , b , α en el modelo conformable- ψ_3

4.3.2. Factores de fricción en medios porosos con permeabilidad variable y conformable

En esta sección se comparará al nuevo modelo conformable con el modelo de Brinkman con permeabilidad variable, para definir si también es capaz de describir este tipo de sistemas. Se emplea nuevamente el modelo con permeabilidad como función del espacio, definida en la Sec.3.2.3.

Para iniciar, se obtiene la expresión para el factor de fricción para este modelo, el cual tiene la siguiente forma:

$$f_{BrvK} = \frac{12(8 + Ha)}{Re\mu_e}, \quad (4.15)$$

donde $Ha = \mu h^2 / \mu_e K$ es el número de Hamdan, y μ_e es la viscosidad efectiva del medio poroso.

Las Ecs.(4.12)-(4.15) son graficadas en la Fig.4.7a, para valores no optimizados de a , b , α , considerando que $\mu/\mu_e = 0.3025$, en la que se observa nuevamente que el modelo conformable se encuentra dentro de al menos cuatro distintos valores de K . Por otro lado, en la Fig.4.7b ya se muestran con los parámetros optimizados para una permeabilidad de $K = 1 \times 10^{-8} m^2$.

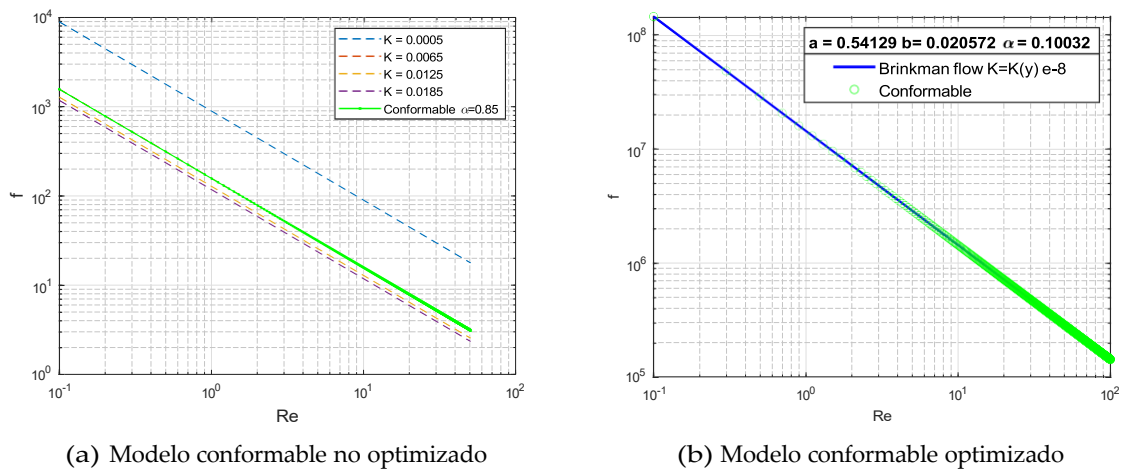


Figura 4.7: Factor de fricción conformable- ψ_3 describiendo un medio poroso con permeabilidad constante

Para analizar el intervalo de aplicación del factor de fricción conformable se probaron algunos valores para la permeabilidad. En la Tabla 4.3 se muestran los valores óptimos para a , b , α para un intervalo de permeabilidades de $1 \times 10^{-10} \leq K \leq 1 \times 10^{-4}$, en el que el máximo error absoluto entre los modelos son menores a 1×10^{-3} . Los resultados muestran que conforme la permeabilidad disminuye, también lo hacen los valores para a , b , α .

Tabla 4.3: Valores óptimos para los parámetros conformables

a	b[1/m]	α	K [m²]
0.48469	0.6399	0.5186	1×10^{-4}
0.89182	0.07857	0.29851	5×10^{-6}
0.54129	0.02057	0.10032	1×10^{-8}
0.1	0.0015979	0.1	1×10^{-10}

Una vez determinado el intervalo de validez del modelo conformable- ψ_3 en este medio con permeabilidad constante, se realiza una comparación con modelos que toman información experimental, tratando de extender los sistemas que pueden ser descritos por los modelos conformables.

4.3.3. Validación de los factores conformables con modelos ajustados a experimentos

Con la finalidad de verificar que los modelos conformables son capaces de reproducir datos experimentales, se ha elegido compararlos con un modelo ajustado experimentalmente para el flujo a través de fracturas en rocas areniscas (sandstone), desarrollado por Zhang y colaboradores ($f_Z = \frac{96}{Re_D} [1 + c_1(\frac{a}{e})^{1.1172}]$) [81]. En su estudio desarrollan una expresión para el factor de fricción que proviene de ajustes experimentales, siendo 'este función del Re y de la rugosidad relativa a/e_h (representa la relación entre la amplitud de rugosidad¹ y la apertura hidráulica). Sus resultados muestran que el flujo tiene una zona pre Darciana (lineal) a bajos números de Reynolds que se convierte en flujo Darciano a mayores valores de Re. Para ajustar el modelo de factor de fricción utilizaron un método de mínimos cuadrados respecto a los valores experimentales, y finalmente comprobaron que su modelo muestra ventajas respecto al descrito previamente por Nazridoust [87], también en para fracturas en rocas ($f_N = (123/Re)[1 + 0.12Re^{0.0687}]$). Ambos modelos para fracturas son comparados con experimentos y simulaciones, por lo que compararlos con el modelo conformable, implícitamente también se valida con datos experimentales.

En la Fig. 4.8 se incluyen ambos modelos para fracturas en rocas, considerando $a/e_h = 10$, así como el modelo conformable para valores arbitrarios de a, b, α . El modelo conformable nuevamente cae en el intervalo de ambos modelos para fracturas, lo que sugiere que con valores optimizados será capaz de representarlos. Aplicando el proceso de optimización, se obtienen los valores

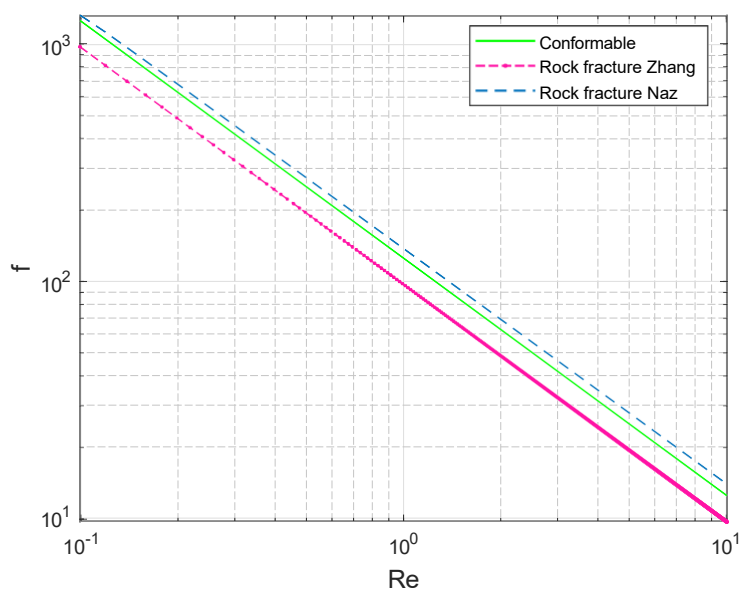


Figura 4.8: Factores de fricción para modelos de fracturas

para los parámetros de la función conformable capaces de representar adecuadamente al flujo a través de fracturas. En la Fig.4.9 se muestran los factores de fricción con valores optimizados comparados con los de los medios porosos, para ambos casos el modelo de orden no entero es

¹La diferencia de altura entre la superficie lisa y la rugosa [86]

una representación precisa del flujo a través de las fracturas.

Para el caso del modelo de Zhang se realizaron pruebas para tres valores del cociente $a/e_h = \{0.01, 10, 100\}$, en el que el modelo conformable presenta precisión con los siguientes valores de errores absolutos:

- $a/e_h = 100$ el max. error absoluto es 9.5×10^{-3}
- $a/e_h = 10$, el max. error absoluto es 5.9×10^{-3}
- $a/e_h = 0.01$ el max. error absoluto es 0.1834

El incremento del factor de fricción es función del aumento de la rugosidad relativa [81], lo que sugiere que para un valor pequeño de $a/e_h = 0.01$ se está representando un sistema con baja rugosidad, más parecido a un espacio liso, parecido al espacio entre dos placas paralelas.

Por otro lado, en el modelo de Nazridoust es descrito por el modelo conformable con un error absoluto máximo de $= 7.914$, mostrando mayor desviación que el modelo de Zhang. De acuerdo con lo descrito en el trabajo de Zhang [81] el modelo de Nazridoust representa mejor a los datos experimentales cuando el Re es bajo $Re < 1$, mientras que para valores $Re > 1$ existen desviaciones mayores del modelo respecto a los datos experimentales. Por lo que el modelo conformable, así como el de Zhang presenta mayor precisión a $Re > 1$.

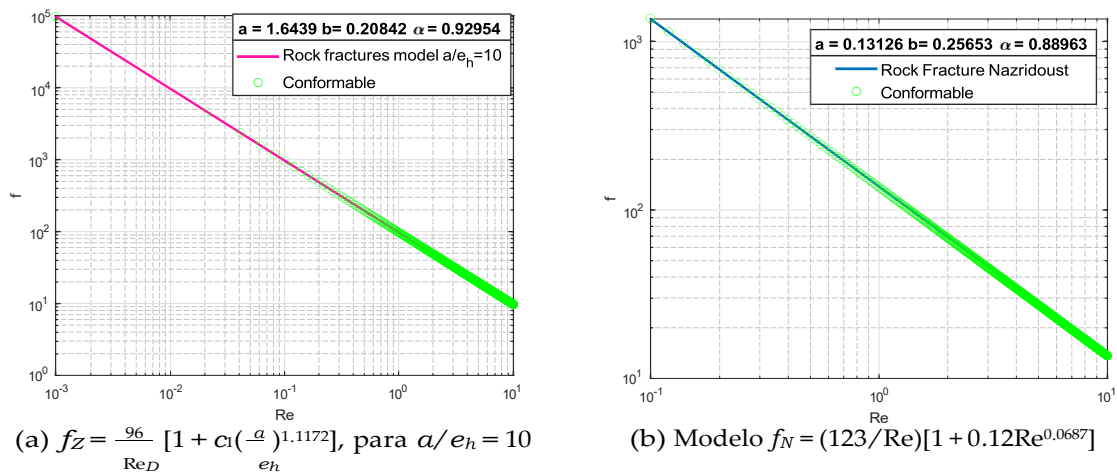


Figura 4.9: Modelos de fracturas en rocas comparados con el modelo conformable- ψ_3

Una vez que el modelo conformable ψ_3 es optimizado para representar a modelos como Darcy, Brinkman y de fracturas en rocas, se analiza qué pasa con los modelos conformables ψ_1 y ψ_2 , así como el modelo fraccionario que se ha estado empleado como comparativo entre los modelos de orden no entero.

4.3.4. Factores de fricción de orden no entero representando flujo en medios porosos

Es importante analizar la validez de los modelos conformables ψ_1 y ψ_2 en términos del factor de fricción, por lo que en esta sección se muestran sus respectivas expresiones, así como para el modelo fraccionario de Caputo. En la Fig. 4.10 se muestra un diagrama de Moody para flujo laminar para todos los modelos de orden no entero.

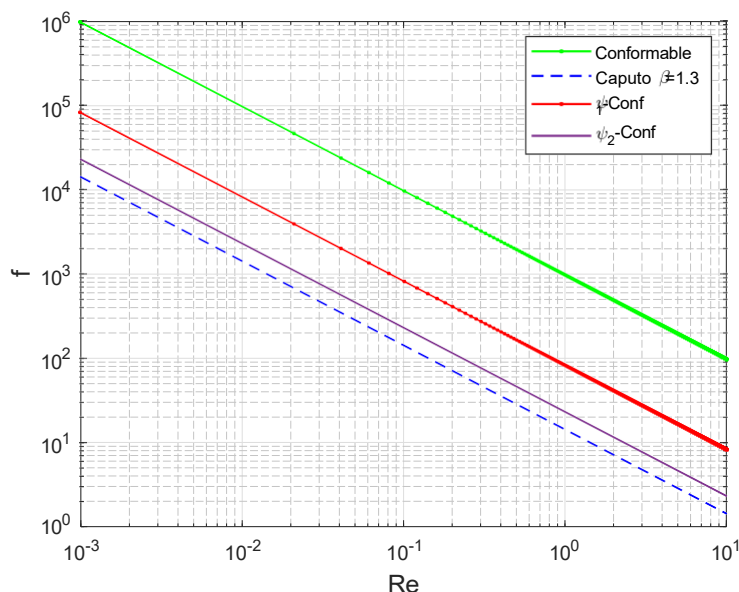


Figura 4.10: Factores de fricción para modelos de orden no entero

Una vez observado el comportamiento para cada factor de fricción con valores arbitrarios para los parámetros a , b , α , β , se implementa el proceso de optimización para compararlos con los modelos de medios porosos.

En primer lugar se obtienen los valores óptimos para describir la ley de Darcy. En las Tablas 4.4-4.6 se muestran los valores de a , b , α para valores del número de Reynolds en los que la ley de Darcy es válida ($Re_k \leq 100$). El intervalo de aplicación de los modelos se elige considerando errores absolutos menores a 1×10^{-2} .

Respecto al modelo fraccionario, se obtuvo un valor óptimo para $\beta = 1.8288$, para permeabilidades menores a $K = 1 \times 10^{-5}$, con un valor máximo para el error absoluto de 9.9×10^{-4} . En el caso de permeabilidades mayores a la mencionada, los errores oscilan entre 4×10^3 y 5×10^4 . Con estos resultados, es evidente que los modelos conformables son más adecuados para describir a la ley de Darcy. Particularmente, el modelo ψ_3 es mejor opción para describir sistemas con bajas permeabilidad, mientras que ψ_1 representa mejor al sistema a permeabilidades de $1 \times 10^{-2} \leq 1 \times 10^{-4}$.

Tabla 4.4: Valores optimizado de los parámetros en las funciones ψ_1, ψ_2, ψ_3 para la ley de Darcy

	$f_{Darcy} = 1/Re_k$				
	K [m²]	a	b	α	max.error abs.
ψ_1	1×10^{-2}	0.3942	28.4078	0.3294	5.02×10^{-4}
	1×10^{-3}	0.1538	0.3473	0.4679	8.71×10^{-5}
	1×10^{-4}	0.209	0.0577	0.7211	6.04×10^{-5}
ψ_2	1×10^{-2}	4.22	2.378	0.1218	4.76×10^{-5}
	1×10^{-4}	0.9361	0.2338	0.5531	4×10^{-3}
	1×10^{-6}	28.386	1.1201	0.99	3.2×10^{-4}
	1×10^{-8}	83.5584	3.5	0.99	5.5×10^{-3}
ψ_3	1×10^{-6}	48.8467	0.1963	0.9199	1.75×10^{-4}
	1×10^{-8}	8.906	1.142	0.3861	2.9×10^{-3}
	1×10^{-10}	2.0377	0.1224	0.4967	4.3×10^{-3}
	1×10^{-12}	2.1×10^{-3}	0.3261	0.1004	1.1×10^{-2}

En segundo lugar, se presentan los valores optimizados para el modelo de Brinkman con permeabilidad constante. En la Tabla 4.5 se incluyen los parámetros, así como los valores para los máximos errores absolutos a distintos valores de permeabilidad. Los modelos con ψ_1 y el modelo fraccionario no resultaron adecuados para describir con precisión a este tipo de flujo, presentando errores absolutos mayores a 1×10^{-2} . El modelo con ψ_3 describe un intervalo de permeabilidades mayores que el modelo con ψ_2 .

Tabla 4.5: Valores optimizados para los modelos ψ_2, ψ_3 para describir el modelo de Brinkman con permeabilidad constante

	$J_{Brink} = \frac{1}{ReDa} \left(1 - \frac{\mu eDa}{\mu} \left(1 - \cosh \left(\frac{J}{\mu eDa} \right) \right) / \sinh \left(\frac{J}{\mu eDa} \right) \right)^{-1}$				
	K [m²]	a	b	α	max.abs.error
ψ_2	1×10^{-2}	25.05	1.9375	0.183	5.17×10^{-7}
	1×10^{-4}	18.3673	8.737	0.9795	2.09×10^{-4}
	1×10^{-6}	49.932	50	0.9711	2.84×10^{-1}
ψ_3	1×10^{-2}	49.6745	12.4126	0.9357	4.83×10^{-6}
	1×10^{-4}	19.9945	0.3862	0.747	2.55×10^{-4}
	1×10^{-6}	0.5037	0.0907	0.4003	3.76×10^{-2}
	1×10^{-7}	0.5947	0.0598	0.2447	5.04×10^{-1}

Para el caso del modelo de Brinkman con permeabilidad variable, el factor de fricción con ψ_3 muestra mayor precisión para describir valores de permeabilidad menores, mientras que en el modelo con ψ_1 es más adecuado para altas permeabilidades. Esta información está disponible en la Tabla 4.6. Respecto al modelo fraccionario, nuevamente no se entraron valores óptimos en los que el error absoluto sea menor a 8×10^{-2} .

Finalmente, el modelo para fracturas por Nazridoust es descrito por todos los modelos conformables con gran precisión, mostrando errores menores a 8×10^1 , mientras que para el modelo de Zhang los modelos con ψ_2 y ψ_3 presentan los menores errores absolutos para $a/e_h > 0.01$

Tabla 4.6: Valores optimizados de los parámetros en las funciones ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 para describir el flujo de Brinkman con permeabilidad variable

Darcian Flow $f = 12(8 + \text{Ha})/\text{Re}_{\mu_e}$					
	K [m²]	a	b	α	max.abs.error
ψ_1	1×10^{-2}	0.3942	28.4078	0.3294	5.02×10^{-4}
	1×10^{-3}	0.1538	0.3473	0.4679	8.71×10^{-5}
	1×10^{-4}	0.209	0.0577	0.7211	6.04×10^{-5}
ψ_2	1×10^{-2}	4.22	2.378	0.1218	4.76×10^{-5}
	1×10^{-4}	0.9361	0.2338	0.5531	4×10^{-3}
	1×10^{-6}	48.8467	0.1963	0.9199	1.75×10^{-4}
	1×10^{-8}	8.906	1.142	0.3861	2.9×10^{-3}
ψ_3	1×10^{-6}	48.8467	0.1963	0.9199	1.75×10^{-4}
	1×10^{-8}	8.906	1.142	0.3861	2.9×10^{-3}
	1×10^{-10}	2.0377	0.1224	0.4967	4.3×10^{-3}
	1×10^{-12}	2.1×10^{-3}	0.3261	0.1004	1.1×10^{-2}

(max.abs.error < 1×10^{-3}).

Los resultados para los factores de fricción optimizados mostrados en las Tablas 4.2-4.6 sugieren que conforme la permeabilidad disminuye, también lo hacen los valores de a y b .

Con estas comparaciones para distintos tipos de medios porosos y valores de permeabilidad, es posible sugerir que los factores de fricción obtenidos a partir de los modelos conformables funcionan como una generalización de la descripción del flujo a través de medios porosos en régimen laminar Darciano. Por lo que se proponen como modelo unificado para la descripción de medios porosos descritos por la ley de Darcy y Brinkman, así como para algunos modelos que describen el flujo a través de fracturas.

Conclusiones

En este trabajo se seleccionó como operador de orden no entero a la derivada conformable generalizada espacial, la cual fue incluida en las ecuaciones de Navier-Stokes y en un modelo simplificado del flujo de un fluido a través de dos placas paralelas, al cual se le denominó modelo conformable. Este modelo fue empleado para describir el flujo a través de distintos medios porosos mediante la optimización de los parámetros de la función conformable.

Una vez definido el operador de orden no entero, se realizó un análisis para la selección de la función conformable $\psi(y, \alpha)$ que define al operador, explorando distintas funciones y optando por tres de ellas, las cuales contienen a los parámetros (a, b, α) que les dieron flexibilidad para describir a los procesos físicos. Con las nuevas derivadas, se definen modelos conformables, sus soluciones analíticas, así como las expresiones para el flujo volumétrico y el factor de fricción. La interpretación física de los modelos conformables y su aplicación fue obtenida mediante la comparación de los modelos de orden no entero con los modelos de flujo a través de medios porosos.

Inicialmente se obtuvieron dos funciones conformables definidas como $\psi_1(y, \alpha)$ y $\psi_2(y, \alpha)$, las cuales se caracterizan por ser una potencial y la otra racional respecto a la variable independiente y . Dichas funciones fueron elegidas a través de un análisis comparativo entre diversos tipos de funciones, observando cuáles presentaban mayor rango y diferencias con los modelos de Khalil y clásico. Con los modelos conformables se obtuvieron perfiles de velocidad, los cuales muestran menores magnitudes que las soluciones clásicas, volviendo este resultado un punto de partida para sugerir su uso en la descripción de medios porosos.

Analizado el fenómeno que sugirieron las soluciones, se realizó una comparación con los modelos clásicos que describen el flujo a través de medios porosos, el modelo de Brinkman con permeabilidad constante y variable a través de los perfiles de velocidad y del flujo volumétrico. Para que los modelos de orden no entero describan con precisión a este tipo de flujos se implementó un proceso para optimizar los parámetros, a través del cual se obtuvieron resultados más cercanos al flujo deseado y los respectivos valores de los parámetros (a, b, α) . Con estos valores óptimos y obteniendo el error absoluto entre los datos del modelo de medio poroso y el modelo conformable, se definió un intervalo para el cual tienen validez perfiles de velocidad que incluyen al operador de orden no entero.

Para el modelo con ψ_1 se obtiene que su precisión para describir el perfil de velocidad es mayor para sistemas de alta permeabilidad ($Da \geq 10^{-2}$), mientras que para los flujos volumétricos es el mejor de los modelos de orden no entero con un error absoluto máximo de 0.056. Para este modelo también se realizó una validación experimental, en la que se tomó información de un medio poroso descrito por el modelo de Brinkman y se ajustaron las condiciones de frontera, dando como resultado que las desviaciones del modelo clásico pueden ser compensadas por el modelo conformable en un intervalo definido ($-3.2 \times 10^{-3} \leq y \leq 0$).

Respecto al modelo con ψ_2 se observó una mejor representación de los medios con permeabilidad variable, tanto para el perfil de velocidad como para el flujo volumétrico (con un error absoluto máximo de 7.5×10^{-3}), en un intervalo de $9.7 \times 10^{-5} Da \leq 1$.

Adicionalmente se obtuvieron expresiones para la permeabilidad en función de los modelos conformables, las cuales permitieron establecer una relación entre la derivada conformable espacial y las características geométricas del sistema, ya que los parámetros conformables están directamente relacionados con la permeabilidad del medio y la cantidad de fluido que atraviesa el sistema, otorgándole a la derivada conformable el potencial de describir la transformación de un espacio vacío a uno que puede contener obstáculos definidos por una matriz sólida. Se analizó que estos parámetros podrían estar relacionados con una manera de establecer una nueva métrica para medir el espacio, como que b puede estar asociado a una longitud característica del medio poroso, por ejemplo, el inverso de la distancia que separa los sólidos de la matriz del medio.

Con base en los resultados obtenidos con las funciones ψ_1 y ψ_2 resultó evidente su aplicación en medios porosos, por lo que se decidió incluir una tercera función conformable, cuya forma está inspirada en una expresión para la permeabilidad como función de la porosidad y de la geometría fractal, con la hipótesis de que al incluir una estructura empleada en los medios porosos y que define una característica de éstos, pueda resultar en un modelo más preciso y con una intención definida. El modelo ψ_3 es una función racional con monomios distintos que involucran a la variable independiente y y a los parámetros a , b , α . El análisis de esta función se llevó a cabo a través del factor de fricción, uno de los números adimensionales más empleados para el diseño de procesos y flujo de fluidos.

El factor de fricción conformable quedó definido como una función del número de Reynolds clásico, a diferencia de la mayoría de los factores de fricción en medios porosos, representando una ventaja respecto a éstos. El mismo modelo fue capaz de representar con gran precisión (error absoluto menor a 10) diversos modelos de medios porosos, incluyendo al modelo de Darcy, al modelo de Brinkman con permeabilidad constante y variable, así como a dos modelos definidos para fracturas en rocas. El intervalo de permeabilidades para el que el modelo conformable es una unificación de medios porosos, varía de acuerdo al tipo de sistema, así como los parámetros a , b , α .

Adicionalmente, todos los modelos conformables fueron comparados con un modelo fraccionario obtenido a partir de la derivada de Caputo, resultando que todos los modelos conformables presentan ventajas respecto al fraccionario para describir el flujo a través de medios porosos. Esto sugiere que un operador local espacial retrata mejor el proceso de que el fluido recorra un espacio formado por una matriz sólida y fracciones vacías.

Con los resultados obtenidos se comprueba que los perfiles de velocidad, flujo volumétrico y factor de fricción conformables son capaces de generalizar a los modelos clásicos, extendiendo su aplicación a distintos medios porosos y encontrando una relación entre los parámetros de los operadores con la geometría del sistema físico en el que describen el movimiento del fluido. Siendo una nueva propuesta para unificar la descripción de distintos medios porosos mediante la optimización de los parámetros a , b , α .

Finalmente se presentan las posibilidades de investigaciones futuras que propician los resultados actuales. Desde la perspectiva práctica, resulta inminente una colaboración con estudios experimentales que permitan validar a los modelos conformables a partir de un diseño experimental adecuado o aún mejor, un proceso o problema específico con datos experimentales en medios porosos que requiera modelado matemático. Por el lado fenomenológico, la exploración de ecuaciones diferenciales en estado transitorio, con procesos convectivos o en sistemas bidimensionales. Y desde el punto de vista del análisis de la derivada conformable, realizar una conexión específica entre la geometría fractal y los parámetros de la derivada conformable.

Apéndice A

Proceso de optimización de parámetros para ajustar modelos conformables a modelo de Brinkman

Se utiliza un algoritmo de optimización de una función multivariable no lineal restringida en Matlab [88], en donde se elige a la suma de los errores absolutos al cuadrado como función a minimizar. En esta función se compara cada punto de la velocidad del modelo conformable con el del medio poroso, elevando al cuadrado la diferencia y sumándola $E = ((V_{conf} - V_{poroso})^2)$, tal que el proceso termine cuando se definan los valores de a , b y α en donde la suma de los errores sea la mínima. La función está sujeta a las siguientes restricciones: $0.01 \leq a \leq 100$, $0.01 \leq b \leq 100$, $0 \leq \alpha \leq 1$, las cuales delimitan los valores posibles de los parámetros conformables, sabiendo que todos son positivos. El proceso de optimización es un proceso iterativo que requiere valores iniciales para ejecutarse, éstos se fijan con el mínimo de cada parámetro. En términos de un proceso clásico de optimización, el problema se define:

$$\begin{aligned} \min f(a, b, \alpha) &= \sum ((V(a, b, \alpha)_{conf} - V_{poroso})^2) \\ &\square a > 0, \\ &\square \\ \text{sujeto a } &\square b > 0, \\ &\square 0 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

El algoritmo de optimización está basado en un método denominado 'interior-point', el cual incluye una función de barrera que penaliza que no se cumplan las restricciones, aproximando la función objetivo mediante modelos cuadráticos dentro del intervalo de las restricciones [89].

Se muestra el código empleado para el proceso de optimización:

```

% Proceso de Optimizacion para a,b, \alpha de la
function p=ajuste_Diff0hp2
global k mu dp me yexp Vxexp h
p0=[0.001 0.00001 0.1]; %Valores iniciales
e=errorfcn(p0); %estableciendo fcn error
lb=[0 0 0.1]; %Restricciones limite inferior
ub=[100 50 0.99]; %limite superior
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[p]= fmincon (@errorfcn ,p0,[],[],[],[], lb, ub);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[Vx,y]=Diff0hp2(p); % Perfil Vel. conformable
%DATOS
k=2e-4;
me=0.001;
dp=1.5;
mu=me;
h=0.1;
Da=k/ h ^2;
B=sqrt(mu/(me*k));
%Brinkman K=cte
Vxexp =(( dp*k)/ mu ).*(1 - exp(-B.* yexp )-((1 - exp(-B.* h))/( exp(B*h)-
exp(-B*h))))*( exp(B.* yexp)-exp(-B.* yexp )));
%K= variable
%Vxexp =-( dp/ me ).*(4/(8+Ha)).*( yexp.^2-h.* yexp );
%GRAFICANDO
g= plot(y, Vx , yexp , Vxexp )
set(g(1),'LineWidth', 2,'Color','blue');
set( g(2),' Marker ','o',' Linestyle ',' none ',' Color ',' green ');
legend('\ psi_2-Conformable N-S model','Brinkman constant permeability');
lgd = legend ;
lgd.Title.String = ['Da= ',num2str(Da),'; a = ',num2str(p(1)),'; b = ',num2str(p(2)),';
\alpha = ', num2str(p(3))]
%Para obtener los errores
Err= max ( abs( Vx - Vxexp ) )
Par= max ( abs( Vx - Vxexp )/ Vxexp )
end

function E=errorfcn(p)
%Datos
k=2e-4;
me=0.001;
dp=1.5;
mu=me;
h=0.1;
Da=k/ h ^2;
B=sqrt(mu/(me*k));
Vxexp =(( dp*k)/ mu ).*(1 - exp(-B.* yexp )-((1 - exp(-B.* h))/( exp(B*h)-
exp(-B*h))))*( exp(B.* yexp)-exp(-B.* yexp ))); [Vx,y]=Diff0hp2(p);
yexp=linspace(0,h);
%Vxexp =-( dp/ me ).*(4/(8+Ha)).*( yexp.^2-h.* yexp );
[Vx,y]=Diff0hp2(p);
%Haciendo una interpolacion para ajustar datos
Vxcalc= spline(y, Vx, yexp);
E=sum (( Vxcalc - Vxexp ).^2);

```

Bibliografía

- [1] Jhalique Jane R. Fojas and Rizalinda L. De Leon. Carotid artery modeling using the navier-stokes equations for an incompressible, newtonian and axisymmetric flow. *APCBEE Procedia*, 7:86–92, 2013. The 3rd International Conference on Biomedical Engineering and Technology - ICBET 2013.
- [2] Chia-Wen Chang, Alex J. Seibel, and Jonathan W. Song. Application of microscale culture technologies for studying lymphatic vessel biology. *Microcirculation*, 26(8):e12547.
- [3] J. Shadid, Bart Waanders, Glenn Hammond, Samuel Collis, and Regan Murray. A comparison of navier stokes and network models to predict chemical transport in municipal water distribution systems. 07 2005.
- [4] G. Marusic and C. Ciufudean. The use of navier-stokes equations in modeling water quality in river-type systems. 10:317–320, 01 2016.
- [5] Rebecca Mott and Michael Lehning. Meteorological modeling of very high-resolution wind fields and snow deposition for mountains. *Journal of Hydrometeorology*, 11(4):934 – 949, 01 Aug. 2010.
- [6] D. Adair and Martin Jaeger. *Reynolds-Averaged Navier-Stokes Modelling of Air Pollution at the Local Urban Scale*. 03 2015.
- [7] K. Heywood. Fluid flows in the environment: an introduction. *Physics Education*, 28:43–47, 1993.
- [8] Khaled K Jaber and Rami S Ahmad. Analytical solution of the time fractional navier-stokes equation. *Ain Shams Engineering Journal*, 9(4):1917–1927, 2018.
- [9] Yong Zhou and Li Peng. On the time-fractional navier–stokes equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 73(6):874–891, 2017.
- [10] Kangle Wang and Sanyang Liu. Analytical study of time-fractional navier-stokes equation by using transform methods. *Advances in Difference Equations*, 2016(1):1–12, 2016.
- [11] Vladimir V Uchaikin. *Fractional derivatives for physicists and engineers*, volume 2. Springer, 2013.
- [12] Huanying Xu, Xiaoyun Jiang, and Bo Yu. Numerical analysis of the space fractional navier–stokes equations. *Applied Mathematics Letters*, 69:94–100, 2017.

-
- [13] Ji-Huan He. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167(1):57–68, 1998.
- [14] Khosro Sayevand, J Tenreiro Machado, and V Moradi. A new non-standard finite difference method for analyzing the fractional navier–stokes equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 78(5):1681–1694, 2019.
- [15] Thomas M Michelitsch, G´erard A Maugin, Andrzej F Nowakowski, Franck CGA Nicolleau, and Mujibur Rahman. The fractional laplacian as a limiting case of a self-similar spring model and applications to n-dimensional anomalous diffusion. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 16(4):827–859, 2013.
- [16] Brenden P Epps and Benoit Cushman-Roisin. Turbulence modeling via the fractional laplacian. *arXiv preprint arXiv:1803.05286*, 2018.
- [17] Bertram Ross. A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. In *Fractional calculus and its applications*, pages 1–36. Springer, 1975.
- [18] Manuel Duarte Ortigueira. *Fractional calculus for scientists and engineers*, volume 84. Springer Science & Business Media, 2011.
- [19] G. Sales Teodoro, J. A. Tenreiro Machado, and E. Capelas de Oliveira. A review of definitions of fractional derivatives and other operators. *Journal of Computational Physics*, 388:195–208, July 2019.
- [20] Dumitru Baleanu and Arran Fernandez. On fractional operators and their classifications. *Mathematics*, 7(9):830, 2019.
- [21] HW Zhou, S Yang, and SQ Zhang. Conformable derivative approach to anomalous diffusion. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 491:1001–1013, 2018.
- [22] Sania Qureshi, Mokhi Maan Chang, and Asif Ali Shaikh. Analysis of series rl and rc circuits with time-invariant source using truncated m, atangana beta and conformable derivatives. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 6(3):217–227, 2021.
- [23] Asim Zafar and Aly R Seadawy. The conformable space-time fractional mkdv equations and their exact solutions. *Journal of King Saud University-Science*, 31(4):1478–1484, 2019.
- [24] Shuai Yang, Liping Wang, and Shuqin Zhang. Conformable derivative: Application to non-darcian flow in low-permeability porous media. *Applied Mathematics Letters*, 79:105–110, 2018.
- [25] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264:65 – 70, 2014.
- [26] Vasily E Tarasov. No nonlocality. no fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 62:157–163, 2018.

- [27] Dazhi Zhao and Maokang Luo. General conformable fractional derivative and its physical interpretation. *Calcolo*, 54(3):903–917, 2017.
- [28] Kevin Long. Gateaux differentials and frechet derivatives.
- [29] Xiaoyu Cheng, Lizhen Wang, and Shoufeng Shen. On analytical solutions of the conformable time-fractional navier-stokes equation. *Reports on Mathematical Physics*, 89(3):335–358, 2022.
- [30] Tamer Yousef Alabsi. Solution of conformable fractional navier-stokes equation. *MS Thesis*, 2017.
- [31] Aliaa Burqan, Ahmad El-Ajou, Rania Saadeh, and Mohammed Al-Smadi. A new efficient technique using laplace transforms and smooth expansions to construct a series solution to the time-fractional navier-stokes equations. *Alexandria Engineering Journal*, 61(2):1069–1077, 2022.
- [32] Jun Zhang and JinRong Wang. Numerical analysis for navier–stokes equations with time fractional derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, 336:481–489, 2018.
- [33] Rajarama Mohan Jena, Snehashish Chakraverty, and Mehmet Yavuz. Two-hybrid techniques coupled with an integral transformation for caputo time-fractional navier-stokes equations. *Progress in Fractional Differentiation & Applications*, 6(3):201–213, 2020.
- [34] M Levent Kavvas and Ali Ercan. Generalizations of incompressible and compressible navier–stokes equations to fractional time and multi-fractional space. *Scientific Reports*, 12(1):19337, 2022.
- [35] Dazhi Zhao, Guozhu Yu, and Yan Tian. Recursive formulae for the analytic solution of the nonlinear spatial conformable fractional evolution equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 537:122735, 2020.
- [36] Roger Temam. *Navier–Stokes equations and nonlinear functional analysis*. SIAM, 1995.
- [37] P.G. Drazin, N. Riley, and London Mathematical Society. *The Navier-Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*. Number v. 13 in London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2006.
- [38] Giovanni Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations: Steady-state problems*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [39] Charles L Fefferman. Existence and smoothness of the navier-stokes equation. *The millennium prize problems*, 57:67, 2000.
- [40] R.B. Bird, W.E. Stewart, and E.N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. J. Wiley, 2002.
- [41] M Malek Mansour, Florence Baras, and Alejandro L Garcia. On the validity of hydrodynamics in plane poiseuille flows. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 240(1-2):255–267, 1997.

- [42] Martin H. Sadd. Chapter 6 - constitutive relations and formulation of classical linear theories of solids and fluids. In Martin H. Sadd, editor, *Continuum Mechanics Modeling of Material Behavior*, page 200. Academic Press, 2019.
- [43] Frank White. *Fluid mechanics*. McGraw Hill, 7th edition, 2009.
- [44] José Francisco Gómez-Aguilar and Baleanu Dumitru. Fractional transmission line with losses. *Z. Naturforschung, A: Phys. Sci.*, 69(10-11):539–546, 2014.
- [45] JF Gómez-Aguilar, JJ Rosales-García, JJ Bernal-Alvarado, T Córdova-Fraga, and R Guzmán-Cabrera. Fractional mechanical oscillators. *Rev. Mex. Fis.*, 58(4):348–352, 2012.
- [46] M Santos-Moreno, CV Valencia-Negrete, and G Fernandez-Anaya. Conformable derivatives in viscous flow describing fluid through porous medium with variable permeability. *Fractals*, 30(09):2250178, 2022.
- [47] J Bear. *Dynamics of fluids in porous media*. 1972.
- [48] Hendrik C Brinkman. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Flow, Turbulence and Combustion*, 1(1):27–34, 1949.
- [49] TM Mitchell and DR Faulkner. Experimental measurements of permeability evolution during triaxial compression of initially intact crystalline rocks and implications for fluid flow in fault zones. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 113(B11), 2008.
- [50] TAK Sadiq, SG Advani, and RS Parnas. Experimental investigation of transverse flow through aligned cylinders. *International Journal of Multiphase Flow*, 21(5):755–774, 1995.
- [51] Sanjay Sharma and Dennis A Siginer. *Permeability measurement methods in porous media of fiber reinforced composites*. 2010.
- [52] James W Jennings and F Jerry Lucia. Predicting permeability from well logs in carbonates with a link to geology for interwell permeability mapping. *SPE Reservoir Eval. & Eng.*, 6(04):215–225, 2003.
- [53] A Revil and Nicolas Florsch. Determination of permeability from spectral induced polarization in granular media. *Geophysical Journal International*, 181(3):1480–1498, 2010.
- [54] WC Krumbein and GD Monk. Permeability as a function of the size parameters of unconsolidated sand. *Transactions of the AIME*, 151(01):153–163, 1943.
- [55] A Tamayol and M Bahrami. Analytical determination of viscous permeability of fibrous porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(9-10):2407–2414, 2009.
- [56] Xiaohu Yang, Tian Jian Lu, and Tongbeum Kim. An analytical model for permeability of isotropic porous media. *Physics Letters A*, 378(30-31):2308–2311, 2014.
- [57] M. H. Hamdan, M. T. Kamel, and H. I. Siyyam. A permeability function for brinkman's equation. In *Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on Mathematical Methods, Computational Techniques and Intelligent Systems*, MAMECTIS'09, page 198–205. World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), 2009.

- [58] DC Roach and MH Hamdan. On the sigmoid function as a variable permeability model for brinkman equation. *WSEAS Trans. Appl. Theor. Mech.*, 17:29–38, 2022.
- [59] MH Hamdan and MT Kamel. Flow through variable permeability porous layers. *Adv. Theor. Appl. Mech*, 4(3):135–145, 2011.
- [60] Mahmoud Parvazinia, Vahid Nassehi, R. Wakeman, and Mir Hamid Reza Ghoreishy. Finite element modelling of flow through a porous medium between two parallel plates using the Brinkman equation. *Transp. in Porous Media*, 63:71–90, 01 2006.
- [61] Sunil K Gupte and Suresh G Advani. Flow near the permeable boundary of an aligned fiber preform: An experimental investigation using laser doppler anemometry. *Polym. Compos.*, 18(1):114–124, 1997.
- [62] Suresh Advani and Murat Sozer. 2.23. liquid molding of thermoset composites. In A. Kelly and C. Zweben, editors, *Comprehensive Composite Materials*, pages 807–844. Elsevier.
- [63] Alberto Osorio and Efraín Solarte. Determinación del gradiente de velocidad en un flujo real por medio de técnicas unidimensionales de anemometría láser doppler. *Bistua: Revista de la Facultad de Ciencias Básicas*, 7(2):1–6, 2009.
- [64] Ali Tamayol and Majid Bahrami. Analytical determination of viscous permeability of fibrous porous media. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 52:2407–2414, 04 2009.
- [65] A. Tamayol, A. Khosla, B. Gray, and M. Bahrami. Creeping flow through ordered arrays of micro-cylinders embedded in a rectangular minichannel. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 55:3900–3908, 2012.
- [66] Ming-Fan Li, Ji-Rong Ren, and Tao Zhu. Fractional vector calculus and fractional special function. *arXiv preprint arXiv:1001.2889*, 2010.
- [67] Graham Neale and Walter Nader. Practical significance of Brinkman’s extension of Darcy’s law: Coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium. *Can. J. Chem. Eng.*, 52(4):475–478, 1974.
- [68] W-P Breugem. The effective viscosity of a channel-type porous medium. *Phys. Fluids*, 19(10):103104, 2007.
- [69] Thabet Abdeljawad. On riemann and caputo fractional differences. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(3):1602–1611, 2011.
- [70] Anatoliĭ Aleksandrovich Kilbas, Hari M Srivastava, and Juan J Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. Elsevier, 2006.
- [71] Ailian Chang, HongGuang Sun, Yong Zhang, Chunmiao Zheng, and Fanlu Min. Spatial fractional Darcy’s law to quantify fluid flow in natural reservoirs. *Physica A*, 519:119–126, 2019.
- [72] K Huang, JW Wan, CX Chen, YQ Li, DF Mao, and MY Zhang. Experimental investigation on friction factor in pipes with large roughness. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 50:147–153, 2013.

- [73] Lotfi Zeghadnia, Jean Loup Robert, and Bachir Achour. Explicit solutions for turbulent flow friction factor: A review, assessment and approaches classification. *Ain Shams Engineering Journal*, 10(1):243–252, 2019.
- [74] Adrian Bejan, Ibrahim Dincer, Sylvie Lorente, Antonio Miguel, and Heitor Reis. *Porous and complex flow structures in modern technologies*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [75] N Bhanu Reddy and P Rama Rao. Effect of convergence on nonlinear flow in porous media. *Journal of Hydraulic Engineering*, 132(4):420–427, 2006.
- [76] Sabri Ergun. Fluid flow through packed columns. *Chemical engineering progress*, 48(2):89, 1952.
- [77] K Yazdchi and Stefan Luding. Towards unified drag laws for inertial flow through fibrous materials. *Chemical engineering journal*, 207:35–48, 2012.
- [78] K Yazdchi, S Srivastava, and Stefan Luding. On the transition from creeping to inertial flow in arrays of cylinders. In *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, volume 44465, pages 767–772, 2010.
- [79] Anat Arbhahirama and Antonio A. Dinoy. Friction factor and reynolds number in porous media flow. *Journal of the Hydraulics Division*, 99(6):901–911, 1973.
- [80] N Dukhan. Brinkman-extended darcy flow in metal foam: analysis and experiment. *HEFAT 2012*, 2012.
- [81] Zhijia Zhang and Jan Nemcik. Friction factor of water flow through rough rock fractures. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 46:1125–1134, 2013.
- [82] E Rodriguez, F Giacomelli, and A Vazquez. Permeability-porosity relationship in rtm for different fiberglass and natural reinforcements. *Journal of composite materials*, 38(3):259–268, 2004.
- [83] Antonio Costa. Permeability-porosity relationship: A reexamination of the kozeny-carman equation based on a fractal pore-space geometry assumption. *Geophysical research letters*, 33(2), 2006.
- [84] Boming Yu and Wei Liu. Fractal analysis of permeabilities for porous media. *AIChE journal*, 50(1):46–57, 2004.
- [85] Nico M Temme. *Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics*. John Wiley & Sons, 1996.
- [86] L Burstein. Lubrication and roughness. In *Tribology for Engineers*, pages 65–120. Elsevier, 2011.
- [87] Kambiz Nazridoust, Goodarz Ahmadi, and Duane H Smith. A new friction factor correlation for laminar, single-phase flows through rock fractures. *Journal of Hydrology*, 329(1-2):315–328, 2006.

-
- [88] The MathWorks Inc. Matlab version: 9.13.0 (r2022b), 2023.
- [89] Richard H Byrd, Mary E Hribar, and Jorge Nocedal. An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 9(4):877–900, 1999.