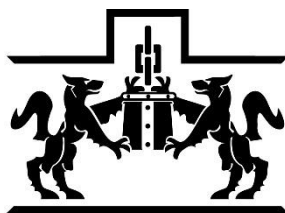


UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA

Estudios con Reconocimiento de Validez Oficial por Decreto Presidencial
Del 3 de abril de 1981



LA VERDAD
NOS HARÁ LIBRES

UNIVERSIDAD
IBEROAMERICANA

CIUDAD DE MÉXICO ®

“FIJACIÓN DEL PRECIO DE UNA OPCIÓN FINANCIERA MEDIANTE
EL MODELO DE BLACK SCHOLES MERTON MODIFICADO”

TESIS

Que para obtener el grado de

MAESTRA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

Presenta

PAULA BEATRIZ MORALES BAÑUELOS

Director: Dr. Guillermo Fernández Anaya

Codirector: Dr. Nelson Muriel Torrero

Lectores:

Dra. Dominique Anne Celine Brun Battistini

Dr. Alejandro Rodríguez Arana Zumaya

Dr. Marco Antonio Ruíz Olvera

Ciudad de México, 2023

Resumen

De acuerdo con la información proporcionada por el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), el valor razonable de las opciones financieras se obtiene inicialmente al aplicar el modelo tradicional de Black-Scholes y Merton, dicho valor va variando a lo largo de la jornada diaria; de acuerdo con la oferta y demanda hasta alcanzar el punto de equilibrio. Esta investigación tiene como objetivo desarrollar un modelo que proporcione una mejor aproximación del precio de equilibrio de las opciones, asimismo, el modelo propuesto en la presente investigación considera la dependencia de los parámetros de la ecuación diferencial estocástica con respecto al tiempo y las derivadas conformables. Adicionalmente, se realizó un análisis empírico, por lo que se tomó una muestra de 16 opciones de compra europeas sobre acciones listadas en el MexDer el 3 de noviembre de 2020. Se calcularon los valores de las primas de los contratos de esta muestra, mediante la aplicación de los Modelos de Black-Scholes y Merton, movimiento browniano Fraccionario Estándar y el modelo desarrollado en la presente investigación, considerando la información del mercado mexicano. Se compararon los resultados de cada modelo con el valor real al que se vendió cada contrato de opción, concluyendo que el modelo presentado en este trabajo es el que aproxima en mayor medida el valor de mercado de los derivados.

Declaración

Yo Paula Beatriz Morales Bañuelos en calidad de autor de la tesis, “Fijación del precio de una opción financiera mediante el modelo de Black-Scholes y Merton Modificado” autorizo para su utilización en la Biblioteca Francisco Xavier Clavigero en formato electrónico o impreso y sin fines de lucro, cuyo titular es la Universidad Iberoamericana Ciudad de México, por un período ilimitado a contar desde la fecha de la publicación de la presente, con expresa renuncia a los derechos derivados de su explotación en dichos medios y durante el mencionado período.

Índice General

Resumen	2
Declaración	3
Índice General	4
Capítulo 1	4
Introducción	4
1.1 Planteamiento General del Problema	8
1.2 Objetivos	10
1.2.1 General	10
1.2.2 Objetivos Específicos	10
1.3 Justificación	11
1.4 Contribución	12
Literatura Previa	13
Modelos y Métodos Previos	16
3.1. Modelo de Black, Scholes y Merton con parámetros variantes en el tiempo	16
3.2. Modelo Browniano Fraccional Estándar	18
3.3 Derivadas Conformables	20
Modelo Propuesto	22
4.1. Resolución de la Ecuación de Black, Scholes y Merton mediante derivadas conformables	22
4.2. Incorporación de la dependencia de los parámetros con respecto al tiempo	23
Análisis Empírico	27
Conclusiones	34
Referencias	36

Capítulo 1

Introducción

Actualmente, cualquier tipo de entidad debe prever y minimizar en mayor medida el incremento exponencial de la incertidumbre en todas las transacciones que realice; dicho riesgo puede originarse por factores internos y externos a la firma. De conformidad con De Lara (2006), los riesgos pueden catalogarse de acuerdo a su naturaleza:

- 1) El riesgo de crédito representa la pérdida potencial por la falta de pago de un acreditado o contraparte.
- 2) El riesgo de mercado implica la pérdida potencial por cambios en los factores de riesgo que inciden en la valuación de portafolios de activos, tales como precios, tasas de interés, tipos de cambio, entre otros.
- 3) El riesgo de liquidez consiste en la pérdida potencial por la imposibilidad o dificultad de reestructurar pasivos, o bien de contratar otros, de manera que se pueda hacer frente a la cobertura de obligaciones presentes.
- 4) El riesgo operativo se define como la pérdida potencial por fallas o deficiencias en los controles internos, así como por errores en el procesamiento, almacenamiento y transmisión de la información interna como externamente a la organización. Dentro de esta categoría se incluyen los riesgos legales y tecnológicos. Los primeros se refieren a la pérdida potencial derivada del incumplimiento de las disposiciones legales y administrativas aplicables, la emisión de resoluciones administrativas y judiciales desfavorables conllevando a la restitución económica por daños punitivos. Los riesgos tecnológicos implican la pérdida potencial por daños, interrupción, alteración y fallas en los sistemas de cómputo, ya sea por cuestiones internas o externas a la entidad.

Tanto las personas físicas como las morales buscan los medios para minimizar las pérdidas ocasionadas por cualquier tipo de riesgo. Una de las estrategias utilizadas con mayor frecuencia es la aplicación de los instrumentos derivados.

Según el propósito para el cual se usen los derivados se pueden clasificar en dos categorías:

i) De cobertura: se adquieren para evitar que los recursos de una entidad afecten por fluctuaciones en el mercado.

ii) De especulación: se adquieren derivados con el objetivo de obtener ganancias extranormales por la asimetría de la información en los mercados financieros.

El valor de los instrumentos derivados como su nombre lo indica, depende del comportamiento de las cotizaciones de los activos subyacentes, los cuales pueden ser acciones, tasas de interés, índices, tipos de cambio, bonos, divisas y *commodities*, entre otros.

Los instrumentos financieros derivados se pueden negociar en un mercado regulado o bien en los denominados *over the counter market* (OTC) o no regulados.

Los tipos de instrumentos derivados financieros que se pueden negociar con mayor frecuencia son los siguientes:

- **Forwards**

Es un contrato mediante el cual dos partes acuerdan comprar o vender un activo subyacente en una fecha específica y a un precio acordado.

Los contratos *forward* son personalizados y son autorregulados. La liquidación del contrato a plazo se realiza en la fecha de vencimiento, aunque puede revertirse antes del período de vencimiento.

- **Futuros**

Al igual que los *forwards*, los futuros son contratos mediante los cuales las partes se comprometen a comprar o vender un instrumento subyacente a un precio específico en una fecha futura; sin embargo, la diferencia con los contratos *forwards* es que, en el contrato de futuros, el comprador y el vendedor no están obligados a reunirse para celebrar el acuerdo.

Inclusive, el acuerdo entre ellos se realiza a través de la bolsa y con un contrato estandarizado. Además, la cámara de compensación actúa como contraparte de las partes del contrato, lo que reduce el riesgo de crédito.

Al ser un contrato estandarizado, su tamaño es fijo y está regulado por la bolsa de valores. Dado que los contratos futuros están listados en la bolsa de valores y son de naturaleza estándar no pueden modificarse de ninguna manera.

En resumen, los contratos futuros tienen un formato predeterminado, un período de vencimiento y un tamaño predeterminados. Cabe resaltar, que en el caso de los futuros se requiere un margen inicial como garantía y la liquidación de las utilidades o pérdidas se realiza diariamente.

- **Opciones**

Los contratos de opciones son muy diferentes de los contratos de *forwards* y futuros ya que no hay obligación de cumplir el contrato en una fecha determinada.

Estos contratos otorgan el derecho, pero no la obligación de comprar o vender un activo subyacente.

Hay dos tipos de opciones: *call* y *put*. En la opción *call*, el comprador tiene derecho a comprar un activo subyacente a un precio determinado al firmar el contrato. Mientras que en la opción *put*, el comprador tiene el derecho, pero no la obligación de vender un activo subyacente a un precio determinado al firmar el contrato.

En ambos contratos, el comprador tiene la opción de liquidar durante un período determinado (Americanas) o en una fecha determinada (Europeas).

- **Swaps**

Los contratos de *swap* son acuerdos privados entre dos partes. Las partes acuerdan intercambiar su flujo de efectivo en el futuro.

Los *swaps* brindan a los inversionistas la oportunidad de intercambiar los beneficios de sus valores entre sí.

Los principales activos subyacentes en los contratos de swap son las tasas de interés o las monedas, aunque también pueden ser otro tipo de activos como acciones o mercancías. Dado que tanto la tasa de interés como la moneda son de naturaleza volátil, hace que los contratos de *swaps* sean riesgosos.

El presente trabajo se enfocará únicamente en las opciones financieras, debido a que pueden utilizarse para crear una gran variedad de estrategias de funciones de pago.

En primera instancia, se definirán los tipos de opciones financieras y sus características.

“Una opción se define como el derecho, pero no la obligación, de comprar (llamada *call*, C) o de vender (conocida como *put*, P) un activo específico (subyacente), pagando un precio pactado a la fecha del contrato (precio de ejercicio) durante o en un periodo determinado de tiempo (T) (madurez o expiración). Si la opción puede ser ejercida antes de su madurez se le llama una opción Americana, si sólo puede ser ejercida hasta su madurez se le denomina opción Europea” (Trigeoris, 1999). El comprador del contrato es el que va a pagar la prima (precio de adquisición del contrato) y va a poseer el derecho de comprar o vender el activo subyacente, mientras que la contraparte es la que tiene la obligación de vender o comprar, en caso de que el poseedor ejerza su derecho. Al primero se le denomina que tiene una posición larga y el segundo tiene la posición corta.

La prima o premio depende del valor que tenga el subyacente a través del tiempo, así como, el tipo de opción, si es Europea o Americana, del precio de ejercicio, plazo a vencimiento y de la tasa de interés.

$$C = \max(S_t - K, 0) \quad (1)$$

$$P = \max(K - S_t, 0) \quad (2)$$

Donde:

C, valor intrínseco de una opción de compra (*call*).

S_t, precio del subyacente en t, tal que t=0,1,...,T).

K, precio de ejercicio.

P, valor intrínseco de la opción de venta (*put*).

T, representa la fecha de vencimiento del contrato.

Black, Scholes y Merton (1973) fueron los pioneros al desarrollar el modelo mediante el cual se puede determinar el valor de la prima del contrato. Este modelo se basa en el supuesto de que es posible replicar una opción de compra adquiriendo el subyacente y pidiendo prestado a la tasa libre

de riesgo, o bien, se pueda garantizar un flujo de efectivo libre de riesgo al construir una cartera formada por el activo subyacente y la opción. Aún en la actualidad, surgen nuevas propuestas para desarrollar la ecuación diferencial estocástica que de la cual se partió originalmente.

El objetivo de esta investigación es complementar el trabajo desarrollado por Rodrigo y Mamon (2006), quienes propusieron teóricamente la dependencia del tiempo de los parámetros que componen la ecuación diferencial estocástica, para lo cual se obtuvieron las funciones de la volatilidad y de la tasa libre de riesgo con respecto al tiempo. Cabe destacar que ya existen trabajos en los que se aplican las derivadas fraccionales para resolver la ecuación original de Black, Scholes y Merton (BSM) (1973), como son, entre otros, los de Liang, Wang, Zhang, Qiu y Ren (2010), quienes propusieron un modelo bifraccional, en el que asumen que el activo subyacente sigue un proceso de Itô fraccionario y que el cambio en el precio de la opción a lo largo del tiempo es un sistema de transmisión fractal, que permite aplicar derivados fraccionarios en el tiempo y el espacio; sin embargo, Wenting, Xiang y Song-Ping (2015) comentan que aunque la solución de la ecuación BSM mediante la aplicación de derivadas fraccionales a lo largo del tiempo ha sido objeto de muchos estudios; todavía no se han extraído conclusiones financieras plausibles sobre por qué deben utilizarse tales modelos en la práctica comercial. Derivado de lo anterior, se decidió en esta investigación incorporar la derivada conformable, y utilizar el cambio de variable de forma similar al efectuado por Anderson, Camrud y Ulness (2019); pero en este caso sobre el activo subyacente $S^* = \frac{S^\alpha}{\alpha}$. El objetivo al realizar esta transformación, es que el parámetro α ajuste el verdadero valor del subyacente y no se asuma únicamente que éste se comporta como un Movimiento Browniano Geométrico o bien como una martingala. Asimismo, se busca que incorpore, entre otros factores, la ineficiencia de los mercados, la información asimétrica, la poca pulverización, la incesante globalización de las transacciones, la fuerte volatilidad de los activos financieros sustitutos y complementos, y la irracionalidad en la toma de decisiones de los individuos. En primera instancia se desarrolló el modelo teóricamente y con el objetivo de probar el modelo se efectuó un análisis empírico. Para lo cual se tomó la muestra de 16 opciones *call* europeas que cotizaron en el Mercado Mexicano de Derivados el 3 de noviembre de 2021, los valores a los que cotizaron estas opciones se contrastaron con la prima obtenida al aplicar los modelos de BSM (1973), el Movimiento Browniano Fraccionario Estándar (2017) y el desarrollado en esta investigación.

1.1 Planteamiento General del Problema

En los mercados regulados, la prima de las opciones financieras se determina inicialmente al aplicar el modelo tradicional de BSM, y este valor oscila de acuerdo con la oferta y demanda de los compradores y vendedores hasta llegar al precio de equilibrio, el cual es muy cercano al arrojado inicialmente por el modelo; sin embargo, esto sucede en mercados con eficiencia fuerte¹, como es el estadounidense, en cambio, en los mercados con eficiencia débil o semifuerte, el diferencial entre el valor aproximado por los modelos y el de mercado es muy grande.

Derivado de lo anterior, en este trabajo se desarrolló un modelo “flexible” que sea capaz de adaptarse a cualquier tipo de mercado y que aproxime en mayor medida el valor de mercado de las opciones *call* europeas. Las características de este modelo se describen a continuación.

- Se tomó como referencia el trabajo desarrollado por Rodrigo y Mamon (2006), quienes incluyen en la ecuación diferencial parcial estocástica (EDP) propuesta originalmente por BSM (1973) la dependencia de cada uno los parámetros e incluso el valor de la prima de la opción con respecto al tiempo. Posteriormente realizan cambios de variables, con lo cual pueden resolver esta nueva EDP de la misma forma como lo realizaron BSM (1973). Cabe resaltar, que las funciones ²de cada parámetro con respecto al tiempo no las definen explícitamente, únicamente efectúan el desarrollo matemático.
- En la presente investigación se analizaron las series de tiempo de la tasa libre de riesgo y las volatilidades como variables dependientes y el tiempo como variable explicativa, obteniendo como resultado que las funciones polinómicas de segundo orden aproximan adecuadamente (con un 95% de confianza) el comportamiento de ambas variables.
- Se replicó el trabajo de Rodrigo y Mamon (2006), pero incorporando explícitamente las funciones polinómicas en EDP estocástica.
- Adicionalmente se incluyeron las derivadas conformables, particularmente sobre el parámetro del subyacente, sobre el cual se realizó un cambio de variable, como lo presentan Anderson, Camrud y Ulness (2019).
- Se efectuó el desarrollo matemático, de forma tal que la EDP estocástica se resolvió como la ecuación original de BSM (1973) al plantear los parámetros variables como constantes.

¹ La hipótesis del mercado eficiente es una teoría inicialmente enunciada por Fama (1970) que establece que el precio actual de un activo en el mercado refleja toda la información disponible que existe (histórica, pública y privada). Los tipos de eficiencia son: **Eficiencia débil:** Los precios de los activos reflejan toda la información histórica. En consecuencia, el precio de hoy depende únicamente del precio inmediatamente anterior más un proceso aleatorio, denominado “ruido blanco”. **Eficiencia semi-fuerte:** En este caso los precios reflejan tanto la información histórica como la pública disponible de los activos. Un inversor solo podría obtener rentabilidades superiores a las del mercado mediante el uso de información privada o privilegiada. **Eficiencia fuerte:** Los precios de los activos reflejan toda la información existente (histórica, pública y privada). Si algún inversor tuviese acceso a información privilegiada, el precio se ajustaría rápidamente, y no permitiría beneficiarse de esa información.

² El análisis se realizó con variables económicas de México, por lo cual la tasa libre de riesgo considerada en la presente investigación fue la de CETES a 28 días.

El trabajo experimental se describe en seguida:

- Se tomó una muestra de 16 opciones de compra europeas sobre acciones listadas en el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) emitidas el 3 de noviembre de 2020, cada una de estas opciones tiene 5 precios de ejercicio para cada contrato, con vencimientos a 17, 45, 136 y 228 días.
- El análisis empírico se llevó a cabo con variables del mercado mexicano, éstas fueron la tasa de retorno anual de los Cetes a 28 días: 0.1093%, el precio de cierre de cada acción a la fecha de la emisión de las opciones, el 3 de noviembre de 2020,³ las volatilidades constantes de las dieciséis acciones, los cinco precios de ejercicio, y los periodos de vencimientos para cada contrato.
- La volatilidad constante de las 16 acciones se calculó con el modelo GJR-GARCH (1,1) con innovaciones t de *student*.
 - Se calibraron los modelos de BSM (1973), el Movimiento Browniano Fraccionario (propuesto por Njamen y Djeutcha, 2017) y el desarrollado en el presente trabajo, con el objetivo de evaluar cuál brindaba la mejor aproximación posible a la prima a la cual cotizaron cada una de las opciones.

El objetivo general de esta investigación se describe en la siguiente sección.

1.2 Objetivos

1.2.1 General

Desarrollar un modelo que aproxime en mayor medida la prima de mercado al cual cotizan las opciones financieras europeas, incorporando en la ecuación diferencial parcial estocástica funciones cuadráticas entre los parámetros con respecto al tiempo y las derivadas conformables en el subyacente..

1.2.2 Objetivos Específicos

- Resolver la ecuación diferencial parcial estocástica con las funciones explícitas de los parámetros con respecto al tiempo, y la inclusión de la derivada conformable en el subyacente, de forma que se obtenga la solución tradicional de BSM (1973) pero con el cambio de variables.
- Efectuar el análisis empírico, tomando la información de un mercado emergente y aplicar los modelos de BSM (1973), el Movimiento Browniano Fraccionario Estándar (2017), y el desarrollado en este trabajo.

³ La tasa anual de los Cetes a 28 días y el valor de la acción de cada empresa se consultó en la página de internet de la Yahoo Finanzas.

1.3 Justificación

Debido a la incesante globalización de las transacciones, así como la necesidad que tienen los directores, analistas financieros e inversionistas de planear estrategias de forma que se maximicen las ganancias o bien se minimicen las pérdidas, resulta imprescindible anticiparse a los acontecimientos futuros, mediante la predicción de la trayectoria de los valores de los instrumentos de deuda, capital y *commodities*, con base en la aplicación de modelos financieros de vanguardia. Una estrategia utilizada con mayor frecuencia tanto por individuos, corporativos, gobiernos e incluso proyectos es la adquisición de uno o varios tipos de instrumentos derivados.

De acuerdo con De Lara (2010), “los productos derivados son más valiosos en entornos de alta volatilidad o variación en precios.” Actualmente existe una crisis económica a nivel mundial, detonada por la pandemia del COVID-19, lo que ha conllevado a la excesiva inestabilidad en las variables macro y microeconómicas. Por lo cual han cobrado aún más importancia los instrumentos derivados, particularmente las opciones financieras se han tornado un medio de cobertura de uso cotidiano. El valor o precio de mercado de estos contratos se puede estimar mediante modelos en tiempo continuo, como es el de BSM (1973) o en tiempo discreto, como es el binominal, propuesto por Cox, Ross y Rubinstein (1979), a pesar de que existe una gran diversidad de investigaciones para perfeccionar el modelo de BSM, no se ha encontrado el modelo que brinde la mejor aproximación al valor justo o real y que se haya calibrado con información de mercado. Especialmente en los mercados emergentes, como es el mexicano, se dificulta en mayor medida la predicción, debido entre otros factores, a la corrupción, información asimétrica, los compadrazgos, la carencia de buenas políticas por parte de los gobiernos corporativos y el poder de los narcotraficantes sobre el país. Esta situación abre la oportunidad de continuar investigando para desarrollar modelos que brinden la mejor aproximación al valor razonable de la prima de las opciones financieras.

1.4 Contribución

La contribución de este trabajo es el desarrollo teórico de un modelo que aproxime en mayor medida el valor real al cual cotizan los contratos de opciones financieras de compra europeas, así como el análisis empírico del modelo (en adelante BSM modificado) con información del mercado mexicano, contrastando los resultados con los valores de mercado, los obtenidos al aplicar los modelos BSM (1973), el Movimiento Browniano Fraccionario Estándar (2017). Cabe mencionar, que en la presente investigación se resuelve la ecuación BSM utilizando el operador de la derivada conformable sobre el parámetro del subyacente. Este es el primer estudio, del cual se tiene conocimiento, que presenta una aplicación empírica de los resultados y una comparación práctica entre diferentes modelos.

Capítulo 2

Literatura Previa

La globalización constante, la información asimétrica, los costos de transacción, las variaciones imprevistas en las tasas de interés y actualmente el impacto de COVID-19 produjeron una incertidumbre sustancial en la economía; en consecuencia, las empresas deben maximizar sus ingresos y minimizar las pérdidas. Por esta razón, las corporaciones, las instituciones financieras e incluso las empresas no lucrativas consideran necesario protegerse contra estos riesgos a través de instrumentos de cobertura.

Los derivados financieros son utilizados principalmente por individuos o empresas que buscan anticipar los riesgos del mercado o por inversores dispuestos a predecir el comportamiento de los activos financieros a cambio de mayores ganancias.

El año 2008 fue un parteaguas para los mercados mundiales debido a la crisis financiera generada por el *boom* crediticio en Estados Unidos, provocando la burbuja inmobiliaria.

Desde la crisis de 2008, diversas empresas ubicadas en México emitieron y/o adquirieron productos derivados con el propósito de especular, en lugar de ser utilizados como instrumentos de cobertura.

Asimismo, el uso de instrumentos derivados llevó a Lehman Brothers Holding Inc. a la quiebra del banco porque las personas que tenían las hipotecas no tenían la solvencia económica pagar sus deudas.

Según la Comisión de Investigación de la *Security Exchange Commission*, una mayor rigidez en la regulación financiera estadounidense podría haber evitado la crisis financiera de 2008 en Estados Unidos.

En 2014 se publicó en el Diario Oficial de la Federación la Resolución por la que se modifican las normas a los participantes del mercado en contratos de derivados que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores, como respuesta a la crisis financiera de 2008 en la que los "mercados de derivados mostraron diversas debilidades que aumentaron el riesgo sistémico y causaron una pérdida de confianza en el mercado".

Las opciones financieras son instrumentos de cobertura que generan derechos u obligaciones para las partes involucradas. El subyacente puede ser el tipo de cambio, las tasas de interés, las materias primas e incluso la energía sostenible. Una ventaja significativa de estos instrumentos es que

se adaptan a las necesidades de la empresa debido a su enorme utilidad en el diseño e implementación de estrategias. Por lo tanto, es esencial conocer el valor razonable de estos instrumentos.

De acuerdo con la información proporcionada por el Mercado Mexicano de Derivados, el valor razonable de las opciones financieras se obtiene del monto resultante de aplicar el modelo tradicional de Black Scholes Merton, que fluctúa con la oferta y la demanda hasta alcanzar el equilibrio.

Esta investigación tiene como objetivo desarrollar un modelo que proporcione una mejor aproximación al valor de equilibrio, el cual considera la dependencia de los parámetros de la ecuación diferencial parcial con respecto al tiempo, así como las derivadas conformables.

La literatura sobre la incorporación de la dependencia en el tiempo de los parámetros incluidos en la ecuación diferencial parcial desarrollada inicialmente por Black, Scholes y Merton (BSM) (1973) para determinar el precio de las opciones europeas de compra y venta es poco frecuente; sin embargo, Rodrigo y Mamon (2006) hicieron una contribución considerable proponiendo una serie de cambios de variables de forma que el precio de la opción financiera, el valor del subyacente y la tasa libre de riesgo fueran funciones dependientes del tiempo; con estos cambios de variables, replantearon la ecuación diferencial parcial tradicional, llegando a la solución clásica de BSM (1973).

Ghevarya (2019), efectúa un trabajo muy semejante al de Rodrigo y Mamon (2006), la única diferencia radica en que éste se enfoca en la resolución de las opciones de compra *plain vanilla*.

Por otra parte, se han presentado trabajos en los cuales se aplican las derivadas fraccionales con el propósito de resolver la ecuación de Black, Scholes y Merton (1973), algunos de ellos se enuncian a continuación.

Liang, Wang, Zhang (2010), propusieron un modelo bi-fraccional, en el cual asumen que el subyacente sigue un proceso de Itô fraccional y que el cambio en el precio de la opción con el tiempo es un sistema de transmisión fractal, lo cual permite aplicar las derivadas fraccionales en tiempo y espacio.

No obstante, Wenting, Xiang y Song-Ping (2015), comentan que a pesar de que la resolución a la ecuación de Black, et. al (1973) mediante la aplicación de las derivadas fraccionales en el tiempo ha sido tema de muchos estudios; no obstante, aún no se han expuesto conclusiones financieras plausibles acerca de por qué deben ser aplicados tales modelos en la práctica comercial.

En el presente trabajo se continúa el análisis realizado por Rodrigo y Mamon (2006), pero incluyendo la derivada conformable, efectuando el cambio de variable en el valor del subyacente ,

$S^* = \frac{S^\alpha}{\alpha}$ como lo presentan en su trabajo Anderson, Camrud y Ulness (2019).

Por otra parte, cabe señalar que existen investigaciones en las cuales se resuelve la ecuación tradicional de BSM (1973) aplicando las derivadas conformables, como son los trabajos de Yavuz y Özdemir (2017); Yavuz y Yaskiran (2018), Yavuz (2017) y Edeki, Adinya, Akinlabi y Ogundile (2019), los tres primeros coinciden al utilizar para la resolución de la ecuación diferencial parcial de Black, Scholes y Merton (1973) los métodos de perturbaciones de homotopía modificados (MHPMC), el método de descomposición Adomian, llegando a una solución numérica.

Ninguno de los trabajos efectúa aplicaciones empíricas con datos reales, resuelven la ecuación de Black, Scholes y Merton (1973) y realizan simulaciones para validar sus resultados.

Capítulo 3

Modelos y Métodos Previos

En este apartado se presentan los modelos que se consideran como base para desarrollar el presentado en esta investigación.

Rodrigo y Mamon (2006) transformaron la ecuación de Black, Scholes y Merton (BSM) (1973) con parámetros como funciones del tiempo, resolviéndola como si éstas fueran constantes, con lo que llegan a la solución expresada de la misma manera que la tradicional.

El valor de fijación de precios de una opción de compra paga dividendos en el tiempo t y cuyo vencimiento es en T , tal que $t < T$.

Sea K el precio de ejercicio estipulado en el contrato para comprar la opción financiera, cuando el valor del subyacente (el precio de las acciones) $S_t > 0$, sea mayor, en el caso de la opción de compra (*call*) y por el contrario sea menor en el caso de las opciones de venta (*put*).

3.1. Modelo de Black, Scholes y Merton con parámetros variantes en el tiempo

Sea $V(S, t)$ el valor de la prima de una opción call, la cual paga dividendos en el tiempo t y cuyo vencimiento es en T , tal que $t < T$. Sea K el precio de ejercicio estipulado en el contrato de compra de la opción financiera y $S > 0$ el precio de la acción en el tiempo t . Adicionalmente, asumen que la tasa libre de riesgo $r(t)$, el pago por dividendos $D(t)$ y la volatilidad del subyacente $\sigma(t)$ son parámetros dependientes del tiempo. De forma tal que el proceso del precio de la opción planteado por BSM (1973), $V(S, t)$ satisface la ecuación diferencial parcial que se muestra a continuación.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma(t)^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + [r(t) - D(t)] S \frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V = 0 \quad (1)$$

Con condición terminal

$$V(S, T) = (S_T - K)^+ \equiv \max(S_T - K, 0) \quad (2)$$

Rodrigo y Mamon (2006) asumen que la acción no paga dividendos, la tasa libre de riesgo r_c y la volatilidad del valor del subyacente σ_c son parámetros constantes independientes del tiempo.

Derivado de lo cual la EDP del precio de la opción $\bar{V}(\bar{S}, \bar{t})$ en el tiempo \bar{t} y con vencimiento en \bar{T} , donde $\bar{t} < \bar{T}$ se encuentra dada por:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + \frac{\sigma_c}{2} \bar{S}^2 + r_c \bar{S} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{S}} - r_c \bar{V} = 0 \quad (3)$$

Con condición terminal

$$\bar{V}(\bar{S}, \bar{T}) = (\bar{S}_T - \bar{K})^+ \quad (4)$$

Donde \bar{K} es el precio de ejercicio en el tiempo \bar{T} y $\bar{S} > 0$ es el valor del subyacente en el tiempo \bar{t} y los parámetros σ_c , r_c y K son positivos; bajo lo cual Rodrigo y Mamon (2006) pueden transformar las EDP (1) y (2) directamente en una EDP tradicional, con parámetros constantes, como se presenta en las ecuaciones (3) y (4) de forma que $\bar{t} = \bar{T}$ cuando $t = T$.

Utilizan las siguientes transformaciones.

$$V(S, t) = h(t)\bar{V}(\bar{S}, \bar{t}), \quad \bar{S} = S\phi(t), \quad \bar{t} = \psi(t). \quad (5)$$

Al derivar parcialmente la ecuación (5) y al sustituirla en la ecuación (1), Rodrigo y Mamon (2006) obtienen la siguiente ecuación diferencial parcial estocástica con parámetros dependientes del tiempo.

$$h(t) \left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{S}} + \phi'(t)S + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} \psi'(t) \right] + h'(t)\bar{V} + \frac{\sigma(t)^2}{2} S^2 h(t) \phi(t)^2 \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{S}^2} + [r(t) - D(t)] S h(t) \phi(t) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{S}} - r(t)h(t)\bar{V} = 0. \quad (6)$$

Posteriormente sustituyen la ecuación (6) en la (1), reagrupan términos e integran, con lo cual llegan a las funciones que se presentan a continuación:

$$\psi(t) = -\frac{1}{\sigma_c^2} \int_t^T \sigma(u)^2 du + A \quad (7)$$

$$\phi(t) = B \exp \left[-\int_t^T (r_c \psi'(u) + D(u) - r(u)) du \right] \quad (8)$$

$$h(t) = C \exp \left[-\int_t^T (r(u) - r_c \psi'(u)) du \right] \quad (9)$$

Rodrigo y Mamon (2006) obtienen las ecuaciones (10), (11) y (12), considerando que A, B y C son constantes positivas de integración, que la condición de frontera al vencimiento es igual $h(T)(\bar{S}_T - \bar{K})^+ = h(T) \left(\phi(T)S_T - \frac{\bar{K}}{\phi(T)} \right)^+ = h(t)\phi(T)(S_T - \bar{K})^+$, $h(t)\phi(T) = 1$ y $K = \frac{\bar{K}}{\phi(T)}$.

$$B = \phi(T) = \frac{\bar{K}}{K} \quad (10)$$

$$C = h(T) = \frac{K}{\bar{K}} \quad (11)$$

$$A = \psi(T) = \bar{T}. \quad (12)$$

Sustituyendo el valor de las constantes, Rodrigo y Mamon (2006) llegan a la solución clásica de BSM (1973) con parámetros variantes en el tiempo.

$$\bar{V}(\bar{S}, \bar{t}) = \bar{S}N(d_+) - \bar{K} \exp[-r_c(\bar{T} - \bar{t})N(d_-)] \quad (13)$$

$$d_{\pm} = \frac{\ln(\bar{S}/\bar{K}) + (r_c \pm \sigma_c^2/2)(\bar{T} - \bar{t})}{\sigma_c(\bar{T} - \bar{t})^{1/2}}. \quad (14)$$

3.2. Modelo Browniano Fraccional Estándar

Njamen y Djeutcha (2017) modelaron la dependencia de largo alcance de los rendimientos de los activos utilizando el Movimiento Browniano Fraccionario.

La idea de que las rentabilidades bursátiles pudieran exhibir una dependencia de largo alcance fue sugerida por primera vez por Mandelbrot (1968). El Movimiento Browniano Fraccionario, conocido por sus siglas como FBM (*Fractional Brownian Motion*) es un proceso gaussiano el cual no se comporta como semimartingala con dependencia de largo alcance e incrementos dependientes entre sí. Otra característica importante de este proceso es su dependencia de un parámetro Hurst, comúnmente utilizado como una medida de previsibilidad del mercado. La previsibilidad del mercado puede resultar de la dependencia de los rendimientos, de acuerdo con lo señalado por Peters (1996) si una serie temporal tiene un alto exponente Hurst (H), entonces el stock será menos arriesgado.

Biagini et al. (2008) señalan las propiedades más importantes asociadas con el Movimiento Browniano Fraccional.

Proposición 1 Sea B_H un Movimiento Browniano Fraccional Estándar, con $0 < H < 1$:

Cuando $H = 0.5$, el proceso coincide con un Movimiento Browniano Estándar.

Cuando $H \neq 0.5$, el proceso no es una semimartingala.

Cuando $H > 0.5$, el Movimiento Browniano tiene una dependencia de largo plazo, en contraste si $H < 0.5$, la dependencia es de corto plazo.

Njamen y Djeutcha (2017) definen el proceso que sigue el subyacente en el tiempo (S_t) de la siguiente manera:

$$S_t = S_0 \exp \left(\mu t + \sigma B_H(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t^{2H} \right) \quad (15)$$

En este contexto a μ se le conoce como deriva, y representa de la tasa de crecimiento promedio del precio del activo, y σ es la volatilidad del subyacente, mide la fluctuación en el precio del activo financiero bajo estudio. Los supuestos de este modelo son los siguientes:

- 1) La trayectoria del valor del subyacente se modela como se muestra en la ecuación (15), donde $\{B_H(t)\}$ es un movimiento browniano fraccional estándar.
- 2) No se pagan dividendos durante la vigencia del contrato de la opción.
- 3) El mercado es perfecto y eficiente.
- 4) No existen costos de transacción.

- 5) La tasa de interés libre de riesgo se considera constante y conocida.
- 6) La opción es de tipo europeo.
- 7) Las fluctuaciones en el precio del activo subyacente se comportan como una función lognormal.

De conformidad con los supuestos enumerados anteriormente, la ecuación diferencial fraccional del modelo de Black y Scholes que describe el valor de la prima de la opción, es parabólica tipo dos, por lo cual resulta necesario establecer las condiciones iniciales y finales en el tiempo así como en el espacio.

Teorema 1 Bajo las condiciones 1) a 7), la ecuación de Black y Scholes bajo un movimiento browniano fraccional es:

$$rS_t \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) + \frac{\partial V}{\partial t}(S, t) + Ht^{2H-1} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) - rV = 0 \quad (16)$$

El precio teórico de la opción, que brinda el derecho pero no la obligación de comprar el activo subyacente al precio de ejercicio (K) al vencimiento del contrato (T), se define como:

$$\max(S - K, 0) \quad (17)$$

Lo cual brinda la esperanza bajo la probabilidad neutral al riesgo de que el valor actualizado de la opción de compra (*call*) sea:

$$C(S, t) = E(\text{pago } X e^{-rT}) \quad (18)$$

La solución analítica de la ecuación (16) de una opción *call* europea con vencimiento en el tiempo $t \in [0, T]$ se encuentra dada por:

$$C(S, t) = SF(d_1^{\lambda_H}) - Ke^{-r(T-t)}F(d_2^{\lambda_H}) \quad (19)$$

Tal que F es la función de distribución $\mathcal{N}(0,1)$ evaluada en d , es decir:

$$F(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{s^2}{2}} ds \quad (20)$$

Los valores de $d_1^{\lambda_H}$ y $d_2^{\lambda_H}$ y λ_H de acuerdo con Njamen y Djetcha (2017) son:

$$d_1^{\lambda_H} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\lambda_H}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{\lambda_H(T-t)}} \quad (21)$$

$$d_2^{\lambda_H} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\lambda_H}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{\lambda_H(T-t)}} \quad (22)$$

$$\lambda_H = 2Ht^{2H-1} \quad (23)$$

3.3 Derivadas Conformables

Las derivadas fraccionales surgen de la inquietud de generalizar la noción de la diferenciación de $\frac{d^n y}{dx^n}$ de orden “n” de un número entero a no entero, donde “n” puede ser una fracción, un irracional, complejo o bien una función real o compleja.

Khalil, Al Horani, Yousef y Sababheh (2014) presentan una nueva definición de la derivada fraccional cuyo objetivo es facilitar los cálculos, adicionalmente enuncian que las derivadas fraccionales para $0 < \alpha < 1$, son locales por naturaleza. Asimismo, establecen que dada una función $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $t > 0$, la derivada fraccional conformable de f de orden α se encuentra definida como: $T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$ para toda $t > 0$ y $\alpha \in (0,1)$.

Si f es α -diferenciable en algún $(0, a)$, $a > 0$, y el $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^\alpha(t)$ existe, es definida $f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$.

De acuerdo con Anderson, Camrud y Ulness (2019), si la derivada fraccional conformable, denotada como $f^\alpha(t)$ o $T_\alpha(f)(t)$, existe, se dice que es α -diferenciable, derivado de lo anterior presentan el siguiente teorema.

Teorema 1. Si una función $f: [0, \infty)\mathbb{R}$; f es α -diferenciable en $t_0 > 0$, $\alpha \in (0,1]$, entonces f es continua en t_0 . Adicionalmente, si f es diferenciable, entonces $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{\partial f}{\partial t}(t)$.

Con el propósito de analizar la equivalencia entre las derivadas conformables y fraccionales, Anderson et al. (2019) aplican únicamente un cambio de variable, tal que $u = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ llegando al mismo resultado que Khalil et al. (2014):

$$D^\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (24)$$

Sea entonces:

$$x^{1-\alpha} \frac{\partial f(x)}{\partial x} = x^{1-\alpha} \frac{\partial f(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = x^{1-\alpha} \frac{\partial f(u)}{\partial u} x^{\alpha-1} = \frac{\partial f(u)}{\partial u} \quad (25)$$

Los pasos que siguen Anderson et. al (2019) para transformar una ecuación diferencial lineal de segundo orden, conocida por sus siglas como SOLDE (*Second order linear differential equation*) tradicional en una conformable, mediante el cambio de variable son los siguientes.

$$\text{Sea } u = \frac{x^\alpha}{\alpha} \text{ y } \frac{du}{dx} = x^{\alpha-1}, \text{ por lo cual, } du = x^{\alpha-1} dx.$$

Si se calcula la segunda derivada de $\frac{\partial^2 y(u)}{\partial u}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(u)}{du} &= \frac{d}{du} \left(\frac{dy(u)}{du} \right) = \frac{d}{du} \left(\frac{dy \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right)}{dx} \cdot \frac{dx}{du} \right) = \\ \frac{d^2 y(u)}{dx^2} \left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \frac{dy \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right)}{dx} \left(\frac{d^2 x}{du^2} \right) &= x^{2\alpha-2} \frac{d^2 y(u)}{dx^2} + \frac{dy(u)}{dx} \cdot \frac{d^2 x}{du^2} = \end{aligned}$$

$$x^{2\alpha-2} \frac{d^2 y(u)}{dx^2} + (1 - \alpha) x^{-\alpha} x^{1-\alpha} \frac{dy(u)}{dx} = \hat{C}_{2\alpha} y \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right). \quad (26)$$

De la ecuación (26) se desprende la expresión que se muestra a continuación.

$$\hat{C}_{2\alpha} y \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right) = x^{2\alpha-2} \frac{d^2 y(u)}{dx^2} + (1 - \alpha) x^{1-2\alpha} \frac{dy(u)}{dx}. \quad (27)$$

Finalmente, Anderson et. al (2019) muestran cómo se expresaría la ecuación diferencial conformable lineal de segundo orden.

$$p \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right) \hat{C}_{2\alpha} y \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right) + q \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right) D_x^\alpha y \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right) + r \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right) y \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right) = s \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right) \quad (28)$$

Capítulo 4

Modelo Propuesto

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de este trabajo es resolver la ecuación diferencial parcial de Black, Scholes y Merton (1973) tomando como referencia el modelo de Rodrigo y Mamon (2006), incluyendo el cambio de variable propuesto por Anderson et. al (2019), con el objetivo de obtener una ecuación a través de la cual se valúen las opciones *call* europeas con parámetros variantes en el tiempo e incorpore factores no considerados en el modelo tradicional, mediante la aplicación de las derivadas conformables, como son, entre otros, el efecto de la incertidumbre en la economía provocada por los cambios en las variables micro y macroeconómicas, la toma de decisiones irracional de los inversionistas y los costos de transacción.

4.1. Resolución de la Ecuación de Black, Scholes y Merton mediante derivadas conformables

Siguiendo la propuesta de Anderson et al. (2019), con el propósito de resolver la ecuación diferencial parcial estocástica tradicional de BSM (1973), se va a realizar el cambio de variable en el parámetro del subyacente, de forma que $u = \frac{S^\alpha}{\alpha}$ y $\frac{\partial u}{\partial S} = S^{\alpha-1} \rightarrow \partial u = S^{\alpha-1} \partial S$, tal que $0 < \alpha \leq 1$, tal que la primera derivada de la función de u de la opción con respecto a u es igual a:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} = \frac{\partial f\left(\frac{S^\alpha}{\alpha}\right)}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial u} = S^{1-\alpha} \frac{\partial f(u)}{\partial S} = D^\alpha f(S). \quad (29)$$

Posteriormente, se calculó la segunda derivada de la función de u , con respecto a u , incorporando nuevamente el cambio de variable $u = \frac{S^\alpha}{\alpha}$, se llega a la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f(u)}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 f\left(\frac{S^\alpha}{\alpha}\right)}{\partial S^2} \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial f\left(\frac{S^\alpha}{\alpha}\right)}{\partial S} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} + \frac{\partial f(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} = \\ &S^{2\alpha-2} \frac{\partial^2 f(u)}{\partial S^2} + (1-\alpha) S^{1-2\alpha} \frac{\partial f(u)}{\partial S} \end{aligned} \quad (30)$$

Si estas derivadas se sustituyen en la ecuación original desarrollada por Black, Scholes y Merton (1973), la ecuación diferencial parcial estaría representada como se muestra en seguida:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \left(S^{1-\alpha} \frac{\partial f(u)}{\partial S} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(S^{2\alpha-2} \frac{\partial^2 f(u)}{\partial S^2} + (1-\alpha) S^{1-2\alpha} \frac{\partial f(u)}{\partial S} \right) - rf = 0 \quad (31)$$

Bajo lo cual, al efectuar la transformación del subyacente: $\hat{S} = \left(\frac{S^\alpha}{\alpha} \right)$, la solución a la ecuación diferencial estocástica modificada es la siguiente:

$$C(\hat{S}, t) = \hat{S} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (32)$$

Donde:

$$d_1 = \left[\frac{\ln\left(\frac{\hat{S}}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right] \quad (33)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (34)$$

Reescribiendo lo anterior:

$$d_1 = \left[\frac{\ln\left(\frac{S^\alpha}{\alpha K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right] \quad (35)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (36)$$

Al aplicar las propiedades de los logaritmos, a las ecuaciones (35) y (36):

$$d_1 = \left[\frac{\alpha \ln(S) - \ln(\alpha K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right] \quad (37)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)} \quad (38)$$

4.2. Incorporación de la dependencia de los parámetros con respecto al tiempo

Adicionalmente, si el resultado de la subsección 4.1 se introduce a la ecuación diferencial estocástica conformable y la dependencia del valor de los parámetros con respecto al tiempo, se obtendrían las siguientes funciones.

$$V(S, t) = h(t) \bar{V}(\bar{S}, \bar{T}) \quad (39)$$

$$\bar{S} = \Phi(t) \frac{S^\alpha}{\alpha} \quad (40)$$

$$\bar{t} = \psi(t). \quad (41)$$

La ecuación diferencial parcial estocástica que representaría la función diferencial estocástica modificada sería la siguiente.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma(t)^2}{2} \left(\frac{S^\alpha}{\alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + [r(t) - D(t)] \frac{S^\alpha}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V = 0 \quad (42)$$

Con condición terminal.

$$\bar{V}(\bar{S}, \bar{T}) = \max(\bar{S}_{\bar{T}} - \bar{K}, 0) \quad (43)$$

Donde \bar{K} es el precio de ejercicio al tiempo \bar{T} y $\bar{S} > 0$ es el precio del subyacente en el tiempo \bar{t} . Los parámetros σ_c (volatilidad del subyacente constante), r_c (tasa libre de riesgo constante) y \bar{K} se asumen positivos y $\bar{t} = \bar{T}$ cuando $t = T$.

Posteriormente se replicó el procedimiento efectuado por Rodrigo y Mamon (2006), comenzado por derivar parcialmente la ecuación (42), incorporando las transformaciones presentadas en las ecuaciones (39), (40) y (41) hasta igualar las derivadas parciales a los parámetros constantes de la ecuación original de Black, Scholes y Merton (2006) se obtienen los siguientes resultados.

$$\frac{\sigma(t)^2 \phi(t)^2 \left(\frac{S^\alpha}{\alpha} \right)^2}{2\psi'(t)} = \frac{\sigma_c^2}{2} \phi(t)^2 \left(\frac{S^\alpha}{\alpha} \right)^2 = \frac{\sigma_c^2}{2} \bar{S}^2 \quad (44)$$

$$\frac{[r(t) - D(t)] \phi(t) S + \phi'(t) S}{\psi'(t)} = r_c \phi(t) \frac{S^\alpha}{\alpha} = r_c \bar{S} \quad (45)$$

$$\frac{h'(t) - r(t)h(t)}{h(t)\psi'(t)} = -r_c \quad (46)$$

Una vez que se agrupan los términos, se integran y despejan de las ecuaciones (44), (45) y (46) las funciones mediante las cuales se calcularían los valores del subyacente, del tiempo y de la prima de la opción.

$$\bar{S} = -\frac{\bar{K}}{K} e^{-\left[\int_t^T \left(\frac{r_c}{\sigma_c^2} \sigma(v) - r(v) \right) dv \right]} \frac{S^\alpha}{\alpha} \quad (47)$$

$$\psi(t) = \bar{t} = -\frac{1}{\sigma_c^2} \int_t^T \sigma(v)^2 dv + A \quad (48)$$

$$\phi(t) = B e^{-\int_t^T (r_c \psi'(v) - r(v)) dv} \quad (49)$$

$$h(t) = C \exp[-\int_t^T (r(v) - r_c \psi'(v)) dv] \quad (50)$$

Siguiendo el mismo procedimiento presentado en la sección 3.1 del presente trabajo, los valores del precio de ejercicio (K) y de las constantes de integración son los siguientes:

$$K = \frac{\bar{K}}{\phi(t)} \quad (51)$$

$$B = \phi(T) = \frac{\bar{K}}{K} \quad (52)$$

$$C = h(T) = \frac{K}{\bar{K}} \quad (53)$$

$$A = \psi(T) = \bar{T}. \quad (54)$$

Posteriormente, se procedió a determinar las funciones que representan la dependencia de la tasa libre de riesgo y de la volatilidad del precio del subyacente con respecto al tiempo, a través del programa *RStudio*, se concluyó que las expresiones cuadráticas hacen una buena aproximación.

$$\sigma(u) = \sigma(t) = \sigma_2 t^2 + \sigma_1 t + \sigma_0 \quad (55)$$

$$r(u) = r(t) = r t^2 + r_1 t + r_0 \quad (56)$$

$$\sigma(t)^2 = \sigma_2^2 t^4 + \sigma_1^2 t^2 + \sigma_0^2 + 2\sigma_2 \sigma_1 t^3 + 2\sigma_1 \sigma_0 t + 2\sigma_2 \sigma_0 t^2 \quad (57)$$

Las funciones cuadráticas mostradas en las ecuaciones (55) a (57), se integraron a la ecuación (47), obteniendo con ello la solución del subyacente.

$$\bar{S} = \frac{\bar{K}}{K} * \frac{S^\alpha}{\alpha} * \exp\left[\frac{T^3}{3} \left(\frac{r_c}{\sigma_c}(\sigma_2 - r_2)\right) - \frac{T^2}{2} \left(\frac{r_c}{\sigma_c}(\sigma_1 - r_1)\right) - T \left(\frac{r_c}{\sigma_c}(\sigma_0 - r_0)\right) + \frac{t^3}{3} \left(\frac{r_c}{\sigma_c}(\sigma_2 - r_2)\right) + \frac{t^2}{2} \left(\frac{r_c}{\sigma_c}(\sigma_1 - r_1)\right) + t \left(\frac{r_c}{\sigma_c}(\sigma_0 - r_0)\right)\right] \quad (58)$$

Al aplicar las funciones cuadráticas de la volatilidad del subyacente y de la tasa libre de riesgo se obtiene la resolución de la ecuación (48), obteniendo el siguiente resultado.

$$\bar{t} = \psi(t) = -\frac{1}{\sigma_c^2} \left[\sigma_2^2 \left(\frac{T^5}{5} - \frac{t^5}{5} \right) + \sigma_1^2 \left(\frac{T^3}{3} - \frac{t^3}{3} \right) + \sigma_0^2 (T - t) + 2\sigma_2 \sigma_1 \left(\frac{T^4}{4} - \frac{t^4}{4} \right) + 2\sigma_1 \sigma_0 \left(\frac{T^2}{2} - \frac{t^2}{2} \right) + 2\sigma_2 \sigma_0 \left(\frac{T^3}{3} - \frac{t^3}{3} \right) + \bar{T} \right]. \quad (59)$$

Para obtener el valor de $\phi(t)$ es necesario derivar $\psi(t)$, e incorporar las funciones polinómicas de la volatilidad.

$$\psi'(t) = \frac{1}{\sigma_c^2} [\sigma_2^2 t^4 + \sigma_1^2 t^2 + \sigma_0^2 + 2\sigma_2\sigma_1 t^3 + 2\sigma_1\sigma_0 t + 2\sigma_2\sigma_0 t^2] \quad (60)$$

con lo cual se obtiene el valor de $\phi(t)$ al vencimiento del contrato de la opción call europea.

$$\phi(T) = \frac{\bar{K}}{K} \quad (61)$$

De las ecuaciones (54) y (64) se puede despejar el valor de \bar{K} .

$$\bar{K} = \phi(T)K = K \exp \left[\left(\frac{r_c \sigma_2^2}{\sigma_c^2} \right) \left(\frac{T^5}{5} \right) + \left(2 \frac{r_c \sigma_2 \sigma_1}{\sigma_c^2} \right) \left(\frac{T^4}{4} \right) + \left(r_2 + \frac{r_c}{\sigma_c^2} + 2 \frac{r_c \sigma_2 \sigma_0}{\sigma_c^2} \right) \left(\frac{T^3}{3} \right) + (2r_1 \sigma_1 \sigma_0) \left(\frac{T^2}{2} \right) + r_0(T) \right] \quad (62)$$

Al conjuntar los resultados de las integrales conformables, con los obtenidos en esta sección la solución a la ecuación de Black, Scholes y Merton modificada se encuentra dada por:

$$V(S, t) = \frac{K}{\bar{K}} \exp \left[- \int_t^T \left(r(u) - \frac{r_c}{\sigma_c^2} \sigma(u) \right) du \right] \bar{V}(\bar{S}, \bar{t}) \quad (63)$$

Con lo cual se puede expresar la solución de $\bar{V}(\bar{S}, \bar{t})$ de la forma tradicional como lo efectuaron BSM (1973).

$$V(\bar{S}, \bar{t}) = \bar{S} N(d_1) - \bar{K} e^{-r_c(\bar{T} - \bar{t})} N(d_2) \quad (64)$$

$$d_1 = \left[\frac{\ln\left(\frac{\bar{S}}{\bar{K}}\right) + \left(r_c + \frac{\sigma_c^2}{2} (\bar{T} - \bar{t}) \right)}{\sigma_c \sqrt{(\bar{T} - \bar{t})}} \right] \quad (65)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_c \sqrt{\bar{T} - \bar{t}} \quad (66)$$

Capítulo 5

Análisis Empírico

A pesar de que se han realizado muchas modificaciones al modelo de BSM, en muy pocas investigaciones han llevado a cabo análisis empírico con el propósito de probar sus resultados. Aunque como es presentado por Hull (2006), el modelo tradicional de BSM (1973) a pesar de su facilidad de aplicación y de ser una herramienta útil para el cálculo de la prima de las opciones, los resultados obtenidos de dicho modelo no resultan adecuados, particularmente en los países emergentes.

En la presente investigación se consideró una muestra de Opciones Europeas *call* sobre acciones, las cuales fueron listadas el 3 de noviembre de 2020 en el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), las entidades emisoras de las opciones se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Empresas mexicanas cuyas acciones cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores que conforman la muestra

Alfa, S. A.B. de C. V.	Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.
América Móvil, S.A.B. de C.V.	Grupo México, S.A.B. de C.V.
Grupo Bimbo, S.A.B. de C.V.	Orbia Advance Corporation, S.A.B. de C.V.
Cemex, S.A.B. de C.V.	Grupo Aeroportuario del Sureste, S.A.B. de C.V.
Grupo Aeroportuario del Pacífico, S.A.B. de C.V.	Industrias Peñoles, S.A.B. de C.V.
Coca-Cola FEMSA, S.A.B. de C.V.	GMexico Transportes, S.A.B. de C.V.
Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V.	Grupo Televisa, S.A.B.
Gruma, S.A.B. de C.V.	Walmart Inc.

De acuerdo con la información pública emitida por el MexDer y la Bolsa Mexicana de Valores, cada vez que se realiza una emisión de opciones, se publican las acciones sobre las cuales se efectuarán los contratos, cinco días hábiles antes de la fecha de la negociación del precio (prima) de las opciones. Para la obtención del valor final del contrato se toma el precio de cierre del valor del subyacente el día de la negociación y el precio de ejercicio será equivalente al último precio de cierre de la acción del día hábil inmediatamente anterior a la negociación. La puja parte inicialmente de valor obtenido mediante la aplicación del modelo tradicional de BSM (1973). La presentación de posturas para la celebración de Contratos de Opción se reflejará en fluctuaciones mínimas de la prima de \$0.01 (un centavo de peso mexicano).

Es importante mencionar que las acciones de estos corporativos deben cotizar en la Bolsa Mexicana de Valores.

Cada una de las opciones de la muestra tienen 5 precios de ejercicio para cada contrato, los cuales tienen vencimientos a 17, 45, 136, y 228 días. La prima de la opción *call* europea a la que se vendió cada uno de los contratos en el MexDer se obtuvo en tiempo real a través de la plataforma de *Bloomberg*. Para llevar a cabo el análisis de las series de tiempo de los parámetros de los rendimientos de cada una de las acciones de la muestra, la tasa libre de riesgo (Cetes a 28 días), las volatilidades de los rendimientos, etc. Se tomó el periodo comprendido del 2 de enero de 2017 a 3 de noviembre de 2020, cuya periodicidad de la información es diaria, con el objetivo de estimar los polinomios de segundo grado que representarían en mayor medida la relación entre su comportamiento y el tiempo. Este procedimiento se realizó en dos etapas:

- 1) Primeramente, se estimó el proceso GRJ-GARCH (1,1), Glosten, Jagannathan y Runkle (1993), con innovaciones de *t de student* sesgadas, para cada uno de los rendimientos de los activos de los subyacentes.
- 2) Una vez que se obtuvieron las funciones cuadráticas, éstas se utilizaron para resolver la ecuación conformable de Black-Scholes con parámetros variantes en el tiempo.

Con mayor precisión, se consideraron los rendimientos logarítmicos de cada activo definido como $r_t = \nabla \log(S_t)$, como usualmente se determina en finanzas (Cont (2001), Tsay (2005) y Campbell (1997)). Se estimó el modelo:

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 r_{t-1} + \gamma r_t^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \\ \varepsilon_t &\sim st_\nu \end{aligned}$$

Utilizando el paquete *rugarch* (Ghalanos (2022)) mediante el método de máxima verosimilitud en el lenguaje de R para estadística computacional (R Core Team (2021)). Como resultado de este procedimiento de estimación, se estimó el proceso de volatilidad para cada activo $\hat{\sigma}_t^2$. Si se denota r_t como la tasa libre de riesgo, posteriormente utilizando el método de optimización lineal simple se llegaron a los resultados siguientes.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_t &= \alpha + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + u_t \\ r_t &= \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + v_t \end{aligned}$$

Para sustentar lo anterior, se efectuaron pruebas para analizar la presencia de efectos ARCH en las series, utilizando la prueba de multiplicadores de Lagrange (Engle (1982)). En todas las series se rechazó la hipótesis nula de que no existieran efectos ARCH con un nivel de significancia del 1% con *p-values* oscilando de 1.04×10^{-4} a 9.48×10^{-25} . Una vez que se comprobó la existencia de efectos ARCH en las series, a pesar de la eficiencia semifuerte en los mercados, se estimaron los mismos modelos para cada serie. Tradicionalmente, en econometría o en análisis de series de tiempo

se aplican diversas pruebas de bondad de ajuste para cada serie con el propósito de evaluar el ajuste de cada modelo. Por ejemplo, el nivel de significancia del estadístico de los coeficientes es revisado y el modelo es reestimado como se requiera para hacerlo más parsimonioso. Adicionalmente, las pruebas de diagnóstico, como son las de desviación (Positivas o Negativas), las de diagnóstico de estabilidad (como lo es la prueba de Nyblom) son utilizadas hasta encontrar el “mejor modelo”, el cual es construido subsecuentemente en cada serie.

El objetivo principal de la aplicación de la econometría es capturar todos los eventos importantes de la serie de tiempo, para pronosticarlos, así como efectuar relaciones de inferencia entre series. No obstante, el objetivo de esta investigación es diferente, ya que únicamente se aplicó el proceso GJR-GARCH en orden de obtener el proceso de la varianza condicional σ_t^2 . Mediante este modelo se efectuó una buena aproximación de la varianza de los rendimientos del subyacente, buscando que las estimaciones de los parámetros sean consistentes, y que el modelo en general sea capaz de abarcar los diferentes comportamientos de la serie modelada. La razón por la cual se aplicó el proceso GJR-GARCH, el cual es asimétrico, (a pesar de que la serie del activo subyacente no muestre características asimétricas, por consecuencia, no pasa las pruebas de sesgo); sin embargo, la estimación de los parámetros sigue siendo consistente y, por lo tanto, la estimación de la varianza del subyacente presenta cambios insignificantes. Adicionalmente, es una práctica común verificar los supuestos de distribución del modelo. En este trabajo, se asumió una distribución t sesgada que puede ajustar algunas series; pero a otras no; no obstante, en los casos en los que esta distribución no efectúe un buen ajuste, la estimación se convierte en un proceso de cuasi-máxima verosimilitud que, en la mayoría de los casos, también arroja estimaciones consistentes de los parámetros y, en consecuencia, del proceso de la varianza.

Como ilustración de estas características, se puede tomar el caso de Grupo México para el cual la prueba de ARCH reporta un p_value de 5.92×10^{-6} que rechaza sólidamente la ausencia de heterocedasticidad.

Ajustando el GJR-GARCH, se obtuvo un p_value de 0.7664 para la prueba de sesgo en el signo; de 0.574 para la prueba de sesgo en el signo negativo; de 0.4870 para la prueba de sesgo en el signo positivo y, finalmente, 0.6880 para la prueba de sesgo en el signo conjunto. Todos estos resultados indican que la serie está mejor modelada por un proceso GARCH simétrico, desde un punto de vista econométrico. No obstante, siendo consistente la estimación de cuasi-verosimilitud, las varianzas estimadas son virtualmente indistinguibles. La Figura 1 muestra las varianzas estimadas bajo los dos modelos: el GJR-GARCH con innovaciones t sesgadas y el modelo GARCH simple con errores normalmente distribuidos. Todos los diagnósticos apuntan al segundo como mejor modelo.

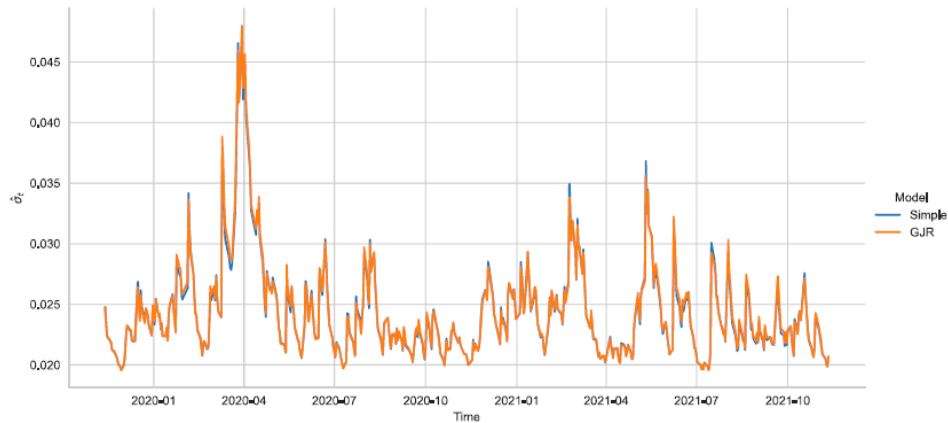


Figura 1. Proceso de varianza estimada mediante dos especificaciones: el GRJ-GARCH con innovaciones t sesgadas y el modelo simple de GARCH con errores normalmente distribuidos. A pesar de todos los diagnósticos que apuntan al segundo proceso, la varianza estimada es indistinguible.

Una vez que se estimaron los modelos GJR-GARCH y los polinomios cuadráticos de los parámetros dependientes del tiempo, se resolvió la Ecuación de BS conformable. Con el fin de establecer una comparación significativa con otros modelos, se consideraron el modelo BSM tradicional y el modelo basado en el movimiento browniano fraccional. Se estimó el parámetro de la derivada conformable α minimizando el diferencial en precios entre los valores arrojados por el modelo y el precio de mercado, es decir, resolviendo el problema.

$$\min\{|V_\alpha(S, t) - V(S, t)|; \alpha \in (0,1)\}$$

Donde $V_\alpha(S, t)$ es el precio del *call* resultante de la ecuación (67) con parámetro conformable α y $V(S,t)$ es la prima de mercado observada. Se resolvió un problema análogo para estimar el índice H de Hurst.

La Tabla 2 muestra la información base de las firmas que componen la muestra, incluyendo el ramo en el cual cotizan dentro de la Bolsa Mexicana de Valores (utilizando únicamente industria y sector), el precio de cierre de la acción a la fecha del contrato de la opción, el rango de precios para la opción *call* la volatilidad implícita del contrato de la opción y la volatilidad estacionaria estimada con el proceso GJR-GARCH(1,1).

La Figura 2 muestra los errores de cada modelo para todas las empresas incluidas en el estudio en función del tiempo hasta el vencimiento de las opciones. Las líneas azul y naranja comparten el eje vertical izquierdo, mientras que la línea verde oliva está indexada al eje y derecho. Como se puede observar, los ejes tienen escalas muy diferentes en todos los casos, lo que demuestra de inmediato que el modelo BSM conformable es más flexible que las alternativas clásicas y produce una

valoración más precisa. Cabe señalar que no parece existir ningún patrón sistemático de sobrevaloración o infravaloración por parte del modelo de BSM conformable.

Los casos en los cuales los errores del modelo de BSM conformable parecen compartir una característica común, es cuando el precio del activo subyacente difiere ampliamente del precio de ejercicio de la opción que se está valorando. Incluso en estos casos, el modelo de BSM conformable rara vez es superado por el BSM tradicional o el BSM fraccional. A pesar de que el diferencial es razonable, ya que al existir una mayor brecha entre el precio actual de las acciones y el de la opción estimada, implica que las expectativas de los inversores entran en juego de manera importante y este comportamiento especulativo no es capturado por el proceso de volatilidad constante.

La Tabla 3 muestra el promedio, la media y el máximo que alcanzan los errores en los diferentes modelos. En esta tabla, se conjuntan los cuatro vencimientos de los contratos. Como se puede observar, la magnitud de los errores es mucho menor en el modelo de BSM conformable de forma consistente en todas las empresas incluidas en el análisis. Los cual es consecuencia de la flexibilidad que ofrece el parámetro de la derivada conformable α , así como los parámetros dependientes del tiempo.

La Figura 3 muestra la dispersión de los valores estimados para el parámetro de la derivada conformable α agrupados por sector. Cabe destacar que mayores vencimientos implican una menor dispersión en la estimación que es heterocedástica en la industria. Particularmente, los sectores de consumo básico, materiales e industrial presentan la mayor volatilidad en todos los casos, mientras que el de servicios de comunicación es el más volátil en el largo plazo. Es importante resaltar que el valor de α en la mayor parte de los casos es muy cercano 1, en cuyo caso el modelo BSM conformable es el BSM tradicional. Es importante recalcar que el modelo de BSM conformable funcionó mejor para empresas y vencimientos con α entre 0.75 y 0.96, lo que sugiere que solo se necesita una ligera desviación del BSM clásico para mejorar significativamente el ajuste.

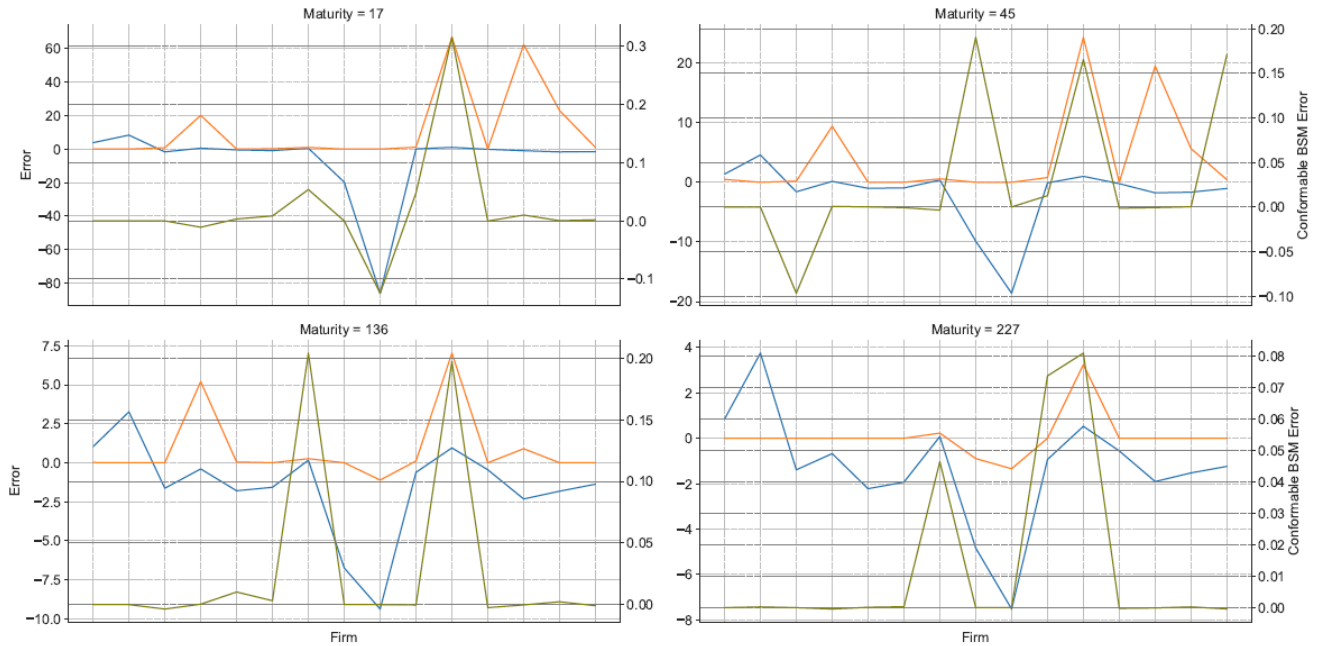


Figura 2. Porcentaje de error para cada empresa (eje x), modelo y precio de mercado. La líneas azules corresponden al modelo de BSM tradicional, la línea naranja al Movimiento Browniano Fraccional y la línea verde oliva al BSM conformable, cuya escala se presenta en el lado derecho del eje y de cada gráfico.

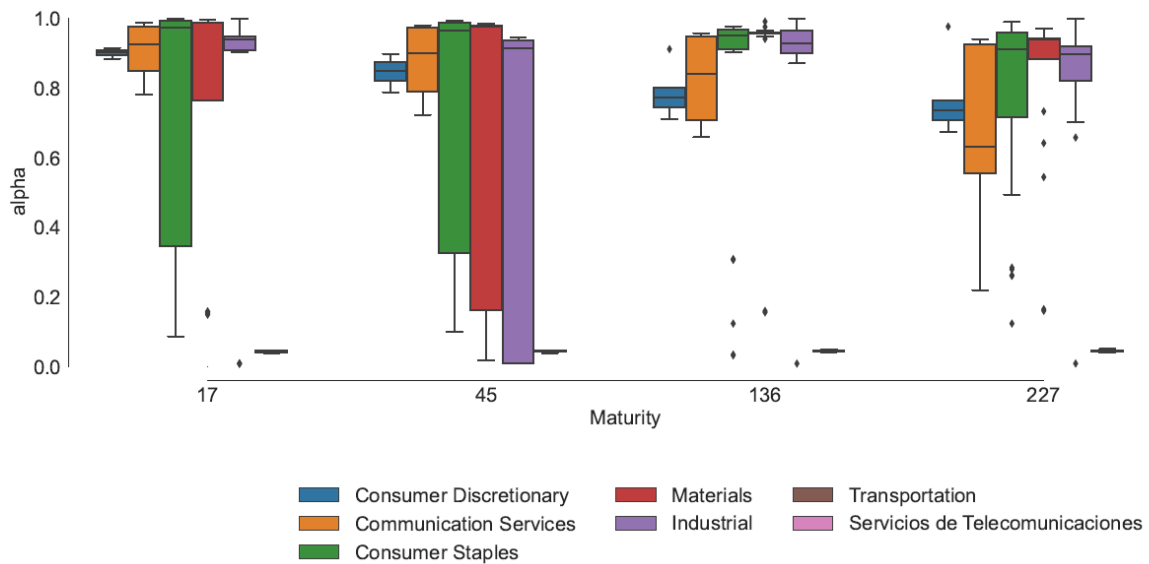


Figura 3. Distribución del valor entre las α entre los 5 precios de ejercicio para cada una los corporativos por sector.

Firm	Industry	Sector (GICS)	Stock Price on Expiration Date (USD)	Price Range for the Option (USD)	Implicit Market Volatility	GJR-GARCH Volatility
Alsa, S.A.B. de C. V.	Consumer Discretionary	Restaurants	19.08	17-21	1.51%	3.56%
América Móvil S.A.B. de C.V.	Communication Services	Wireless Telecommunication Services	15.17	12-14	0.89%	4.10%
Grupo Bimbo S.A.B. de C.V.	Consumer Staples	Packaged Foods and Meats	42.45	38-46	2.12%	2.79%
Cemex S.A.B. de C.V.	Materials	Construction Materials	8.77	8-10	1.69%	1.05%
Grupo Aeroportuario del Pacífico S.A.B. de C.V.	Industrial	Airport Services	218.75	170-190	2.49%	1.22%
Coca-Cola Femsas S.A.B. de C.V.	Consumer Staples	Soft Drinks	82.10	70-90	1.04%	1.11%
Fomento Económico Mexicano S.A.B. de C.V.	Consumer Staples	Alcoholic Beverages	115.34	110-125	1.08 %	1.14%
Gmexico Transportes S.A.B. de C.V.	Transportation	Railroads	21.25	22-30	1.67 %	0.43 %
Grupo Lala S.A.B. de C.V.	Consumer Staples and Packaged Foods	Meats	12.66	8-16	1.0%	1.39 %
Grupo Aeroportuario del Centro Norte S.A.B. de C. V.	Industrials	Airport Services	100.79	90-110	3.84%	1.29%
Grupo México S.A.B. de C. V.	Materials	Diversified Materials and Mining	61.68	42-50	1.79%	1.22%
Orbia Advance Corporation S.A.B. de C.V.	Materials	Commodity Chemicals	37.26	32-38	1.18%	1.26%
Grupo Aeroportuario del Sureste S.A.B. de C. V.	Industrials	Airport Services	327.37	210-230	1.34%	2.37%%
Industrias Peñoles S.A.B. de C.V.	Materials	Precious Metals and Minerals	333.98	320-380	1.90%	2.81%
Grupo Televisa S.A.B.	Communication Services	Cable and Satellite	28.25	24-32	2.17%	1.63%
Walmart de México S.A.B. de C.V.	Consumer Staples	Hypermarkets and Super Centers	3054.45	50-58	1.42%	3.56%

Tabla 2. Datos descriptivos y estadísticas por cada corporativo que componen la muestra

Model Firm	Mean			Median			Max		
	BSM	CBSM	fBSM	BSM	CBSM	fBSM	BSM	CBSM	fBSM
Alsa	2.2011%	0.0000%	0.4439%	1.2171%	0.0000%	0.0000%	12.1989%	0.0000%	3.9220%
América Móvil	6.0480%	0.0001%	0.5273%	4.0211%	0.0000%	0.0007%	29.8127%	0.0008%	5.5578%
Bimbo	-1.9798%	-0.0251%	11.9321%	-1.6125%	-0.0000%	0.0000%	-0.5929%	0.0000%	159.5435%
Cemex	-0.0819%	-0.0026%	46.6565%	-0.1854%	-0.0000%	4.2657%	0.9442%	0.0034%	703.9487%
Coca Cola Femsas	-2.4881%	0.0035%	90.2049%	-1.2365%	0.0001%	0.0021%	-0.0243%	0.0519%	906.5598%
Femsas	-4.5734%	0.0028%	379.2278%	-1.3620%	0.0001%	0.0029%	0.0971%	0.0390%	7229.0118%
Grupo Aeroportuario Centro Del Norte	0.3063%	0.0752%	3.2827%	0.2084%	0.0088%	0.3010%	0.9111%	0.5211%	22.9041%
Grupo Aeroportuario Del Pacifico	-39.3931%	0.0476%	-0.4437%	-7.0531%	0.0000%	-0.0000%	-3.8737%	0.9519%	0.1505%
Grupo Aeroportuario Del Sureste	-493.4705%	-0.0311%	-2.7148%	-11.3131%	0.0000%	-0.7136%	-2.2531%	0.0002%	0.0004%
Grupo Lala	-0.6511%	0.0336%	122.5084%	-0.1883%	-0.0000%	0.3233%	0.9983%	0.3705%	1213.2169%
Grupo Mexicano De Transportes	0.8386%	0.1899%	229.5076%	0.9933%	0.0001%	9.3984%	1.0000%	0.9871%	2944.7110%
Grupo México	-0.3340%	-0.0010%	0.0069%	-0.3033%	-0.0004%	-0.0001%	0.0121%	0.0007%	0.1442%
Orbia	-2.3285%	0.0023%	214.7498%	-1.6844%	-0.0000%	1.2961%	-0.1739%	0.0867%	2642.7659%
Peñoles	-3.9684%	0.0008%	106.3420%	-1.6802%	0.0001%	0.0009%	-0.2050%	0.0140%	1866.8535%
Televisa	-1.2619%	0.0429%	56.3791%	-1.3056%	-0.0001%	0.1331%	0.0876%	0.8513%	929.9902%
Walmart	-1855.4816%	-0.1556%	-1770.1676%	-1170.4865%	0.0000%	-1017.0738%	-582.6037%	0.3518%	0.0000%

Tabla 3. Error acumulado el diferencial del precio de mercado de las primas de las opciones y el resultado de los modelos, calculado para los cuatro vencimientos de los contratos de opciones y los cinco precios de ejercicio.

Conclusiones

El análisis empírico llevado a cabo en la presente investigación sugiere que el modelo de Black-Scholes-Merton conformable puede proporcionar un ajuste superior para valorar las opciones de compra europeas en comparación con los modelos de BSM tradicional y el Movimiento Browniano Fraccional. De hecho, de conformidad con el estudio de las simulaciones, el BSM conformable proporcionó el mejor ajuste en más del 90% de los casos. Cabe destacar, que nuestra apreciación de este resultado es únicamente preliminar. De hecho, para poderlo asegurar bajo cierto nivel de confianza, se requiere de un procedimiento estadístico más robusto que se deja abierto para futuras investigaciones.

Otro aspecto que cabe resaltar es que en los modelos de fijación de precios de activos es el de los costos de transacción. En este caso particular, estos costos no fueron modelados explícitamente; pero la bondad de ajuste que se observa sugiere que la flexibilidad implícita en el uso del operador de la derivada conformable y los parámetros variantes en el tiempo, con lo cual se logró capturar, al menos parcialmente, tales efectos.

Esta mayor aproximación proviene de la capacidad del modelo para ajustar en mayor medida el valor de $V(S, t)$ localmente, al permitir cierta curvatura en su aproximación. Dicha curvatura es auto inducida por los términos de potencia de la forma $S^{1-\alpha}$ los cuales aparecen en la ecuación del modelo de BSM conformable. Como se mencionó anteriormente, los valores del parámetro conformable en la vecindad de 0.8 parecen funcionar apropiadamente en la mayoría de las simulaciones, aunque en el 10% de los estudios no brindó un buen resultado.

Resulta importante destacar, que el modelo falló es en el caso de las opciones que se pudieran catalogar como fuertemente especulativas, es decir, aquéllas cuyo precio de ejercicio difiere ampliamente del precio de la acción subyacente. Bajo esas circunstancias los modelos que se basan en el comportamiento pasado, de igual forma arrojaron resultados inadecuados, lo cual se puede constatar en la aplicación del modelo GJR-GARCH, ya que éste no captura adecuadamente la volatilidad implícita para esas mismas acciones.

Adicionalmente, es adecuado precisar que el Mercado Financiero Mexicano aún no se encuentra plenamente desarrollado, no es un mercado pulverizado, ya que todavía existe una alta concentración de capital en unas cuantas familias, que incluso en la actualidad temen perder el control del capital, asimismo, a pesar de que los corporativos participan en el mercado de valores, el capital de los grupos económicos más grandes pertenece a una sola familia en proporciones no menores al

60%-70%, en la mayor parte de los casos” (Salas-Porras,1992⁴). Mientras que, en Estados Unidos de Norteamérica, la *Securitie and Exchange Commission* (SEC) no permite que un individuo o un grupo de individuos relacionados con la corporación detenten más 10% de las acciones con derecho a voto o si detentan más de 5% del capital y poseen una fuerte participación en el consejo de administración de la compañía, éstas son sancionadas y no se les permite cotizar en las bolsas de valores⁵”.

El proceso de bursatilización en México se encuentra muy retrasado en relación con el que se observa en los países industrializados, lo cual no resulta inesperado, dadas las peculiaridades del desarrollo capitalista en México. De conformidad con la información contenida en el Anuario Financiero de 2020 publicado por la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), actualmente el 53% de las entidades no financieras que cotizan en dicha bolsa tienen como director general a un pariente del propietario, en tanto que el 19% tienen como propietario y director a la misma persona. Es decir, en el 72% de estas entidades no existe independencia entre propietario y director.

Si lo anterior, se a una, entre otros causales el crimen organizado, la violencia y la inseguridad, junto con la reciente crisis económica, se acentúan la falta de interrelación entre las empresas y las instituciones financieras. Lo que conlleva a que México sea considerada una economía emergente cuya eficiencia de los mercados es semi-fuerte. Resulta altamente probable que todos estos factores sean, entre otras causas lo que ocasiona que los modelos financieros y económicos tradicionales no brinden un buen ajuste, particularmente el modelo de BSM tradicional.

Es importante destacar que, algunos investigadores han aplicado el cálculo conformable para resolver la ecuación de BSM tradicional, quienes en su mayoría han utilizado el método de perturbaciones de homotopía, conocido por sus siglas en inglés como (HPM), así como el método de descomposición de Adomian (por sus siglas en inglés como ADM). Por el contrario, en la presente investigación se resolvió la ecuación BSM utilizando el operador de la derivada conformable sobre el parámetro del subyacente. Finalmente es valioso señalar, que este es el primer estudio, del cual se tenga conocimiento, que presenta una aplicación empírica de los resultados y una comparación práctica entre diferentes modelos.

En investigaciones futuras se pueden aplicar las derivadas conformables más generales con más dimensiones, así como otro tipo de derivadas de orden no entero, en la resolución de la ecuación diferencial parcial de BSM (1973) e incorporar los costos de transacción.

⁴ Salas-Porras, Alejandra. “Globalización y proceso corporativo de los grandes grupos económicos en México”. *Revista Mexicana de Sociología*. Vol. 54, No. 2 (Apr-Jun, 1992), pp. 133-162. Universidad Autónoma de México. México.

⁵ Useem, Michael, 1980, “Corporations and the corporate elite”, *Ann. Rev. Sociol.* 1980;6:41-77.

Referencias

- [1] F. Black, M. Scholes. The pricing the options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81 (1973) 637-659.
- [2] R. Merton, Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Management Sciences* 4 (1973) 141-183.
- [3] D.A. Njamen, E. Djeutcha, Solving Black-Scholes Equation Using Standard Fractional Brownian Motion, *Journal of Mathematics Research*, 11 (2017) 142-157.
- [4] R. Rodrigo, R. Mamon, An alternative approach to solve the Black-Scholes equation with time-varying parameters. *Applied Mathematics*, 19 (2006) 398-402.
- [5] S. Ghevariya, Solution of BSM Differential Equation with Time Depend Parameters for Standard Powered Option. *International journal Mathematics and Applications*, 7 (2019) 119-121.
- [6] D. Ahmadian, L.V. Ballestra, Pricing geometric rainbow options under the mixed fractional Brownian motion, *Physica A*, 124458, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.124458>.
- [7] J.R. Liang, J. Wang, W.J. Zhang, W.Y. Qiu, F.Y. Ren, The solution to a bi-fractional Black-Scholes-Merton differential equation, *Int. J. Pure Appl. Math*, 58 (1) (2010) 99-112.
- [8] C. Wenting, X. Xiang, Z. Song-Ping, Analytically pricing double barrier options based on a time-fractional Black-Scholes equation, *Computer, and Mathematics with Applications*, (2015) 1-13.
- [9] D. Anderson, E. Camrud, J. Ulness, On the Nature of the Conformable Derivate and its Applications to Physics, *Journal of Fractional Calculus and Application*, 10 (2) (2019) 92-135.
- [10] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh, A new definition of fractional derivate *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264 (2014) 65-70.
- [11] B. Mandelbrot, J. Van Ness, Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Review*, 10, (1968), 422-437.
- [12] E.E. Peters, *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices and Market Volatility*, first ed., Wiley, United States, 1996.
- [13] F. Biagini, Y. Hu, B. Øksendal, T. Zhang, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motions and Applications. Probability and Its Applications*, Springer, United States, 2008.
- [14] J. Bollerslev, J., Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31 (1986) 307-327.
- [15] R Core Team. R: Rugarch: Univariate GARCH Models, R Package Version 1.4-7; 2022.
- [16] R. Coviello, D. Cristina, F. Russo, On stochastic calculus related to financial assets without semimartingales. *Bull. Sci. Math.*, 135 (6-7) (2011) 733-774.
- [17] A. Dixit, R. Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, first ed., United States, 1994.
- [18] W. Enders, *Applied Econometric Time Series*, Wiley & Sons, Inc, first ed., United States, 1991.
- [19] J. Hull, *Options, Futures and Others Derivates*, Prentice-Hall, tenth ed., United States, 2010.

- [20] K. Miller, *An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley & Sons, first ed., United States, 2001.
- [21] C. Necula, *Option pricing in a fractional Brownian motion environment*, Academy of economic studies, first ed., Bucarest: Romania, 2002.
- [22] S. Pliska, *Introduction to Mathematical Finance Discrete-Time Models*, Blackwell Publishers, Inc, first ed., United States, 1998.
- [23] H.T. Smit, L. Trigeorgis, *Strategic Investments Real Options and Games*, Princeton University Press, first ed., New Jersey, 2004.
- [24] A. Salas-Porras. "Globalización y proceso corporativo de los grandes grupos económicos en México". *Revista Mexicana de Sociología*, (2010), 54(2), 133-162. Universidad Autónoma de México. México.
- [25] N. Bildik y H. Bayramogiu. The solution of the two dimensional nonlinear differential equation by Adomian descompositon method. *Appl. Math. Comput*, (2005), 519-524.
- [26] S.O. Edeki, I. Adinya, G.O. Akinlabi y O.P. Ogundile. Conformable Descomposition for Analytical Solutions of Time Fractional One Factor Markovian Model for Pricing. *Appl. Math. Inf. Sci*, (2019), 539-544.
- [27] X. He y S. Lin. A fractional Black-Scholes model with stochastic volatility and European option pricing. *Expert Systems With Applications*, (2021), 1-8.
- [28] S. Momami y Z. Odibat. Comparison between the homotopy perturbation method and the variational iteration method for linear fractional partial differential equations. *Computers & Mathematics* (2007), 910-919.
- [29] N. Özdemir y M. Yavuz. Numerical solution of fractional Black-Scholes equation by using the multivariate Padé approximation. *Acta Phycica A*, (2017), 1050-1053.
- [30] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh, A new definition of fractional derivate *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264 (2014) 65-70.
- [31] M. Yavuz, M y B. YaSkitan, Homotophy methods for factional linear/no linear differential equations witha a local derivate operator. *BAUN Fen Bil. Enst. Dergisi -(20)3 Özel Sayt 78-59. J BAUN Inst, Sci. Technol (20)3 Special Issue*, (2018), 75-89.
- [32] M. Yavuz, Novel solutions methods for initial boundary value problems of fractional order with conformable differentiation. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, (2018), 1-7.
- [33] M. Yavuz y N. Özdemir. A different Approach to the European Option Pricing Model with new fractional Operator. *Math. Model. Nat. Phnom*, (2018), 1-12.
- [34] M. Yavuz, M. y N. Özdemir. New Numerical Thecniques for Solving Fractional Partial Differential Equations in Conformable Sense. *Springer International Publishing AG, part of Springer Nature*. (2019) 49-62.
- [35] Y. Zhang. A finite difference method for fractional partial differtian equaion. *Appl. Math. Comput*. (2019), 1050-1052.
- [36] A. Ghalanos. *Rugarch: Univariate GARCH Models*, R Package Version 1.4-7; 2022.

- [37] I. Karatzas y S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer; New York, NY, USA, 1998.
- [38] G. Samorodnitsky. Long Range Dependence in financial markets. In *Fractals in Engineering*. Springer: London. UK, 2005.
- [39] T. Mikosch. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. Advanced Series in Statistical Science & Applied Probability; World Scientific. Singapore, 6 (1998).
- [40] R. Cont. Long range dependence in financial markets. In *Fractals in Engineering*. Springer: London. UK, 2005.
- [50] L.R. Glosten; R. Jagannathan y D.E. Runkle. On relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *J. Financ.* (1993), 48, 1179-1801 [Cross-Ref].
- [51] W. Wyss. The fractional Black-Scholes equation. *Fract. Calc. Appl. Int. J. Theory Appl.* (2000), 1, 51-61.
- [52] J.C. Mayo-Maldonado; G. Fernandez-Anaya y O. Ruiz-Martinez. Stability of conformable linear differential systems. A behavioral framework with applications in fractional-order control. *IET Control. Theory Appl.* (2020), 14, 2900-2913. [CrossRef].
- [53] R. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*; Wiley: Hoboken, NJ, USA, 2005.
- [54] C. Franq y J.M. Zakoian. *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, 1st ed; Wiley: Hoboken. NJ, USA, 2010.
- [55] Exchange-Traded Derivate Statistics. Available online: <https://www.bis.org/statistics/extderiv.htm> (accessed on 18 April 2022).
- [56] World GDP. Bloomberg Terminal. Available online: https://bba.bloomberg.net/?Utm_source=bloomberg-menuutm_medium=company (accessed on 18 April 2022).
- [52] J.C. Mayo-Maldonado; G. Fernandez-Anaya y O. Ruiz-Martinez. Stability of conformable linear differential systems. A behavioral framework with applications in fractional-order control. *IET Control. Theory Appl.* (2020), 14, 2900-2913. [CrossRef].
- [53] R. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*; Wiley: Hoboken, NJ, USA, 2005.
- [54] C. Franq y J.M. Zakoian. *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, 1st ed; Wiley: Hoboken. NJ, USA, 2010.
- [55] Exchange-Traded Derivate Statistics. Available online: <https://www.bis.org/statistics/extderiv.htm> (accessed on 18 April 2022).
- [56] World GDP. Bloomberg Terminal. Available online: https://bba.bloomberg.net/?Utm_source=bloomberg-menuutm_medium=company (accessed on 18 April 2022).