

Criterio de Triangularización simultánea de matrices para un problema $2N \times 2N$ de valor propio generalizado (GEP)

22 de junio de 2010

III TALLER DE MATERIA CONDENSADA Y MOLECULAR.
11 al 14 de enero de 2010
UAEM Cuernavaca Morelos y UIA Cd. De México

Ernesto Alejandro Mendoza Álvarez¹, José Job Flores-Godoy¹, Guillermo Fernández-Anaya¹, Leo Diago Cisneros¹

¹ Departamento de Física y Matemáticas, Universidad Iberoamericana,
Prolongación Paseo de la Reforma 880, Lomas de Santa Fe,
Mexico D. F. 01210, Mexico.
alejandro.mendoza@uia.mx

Resumen

Se propone un nuevo criterio explícito, necesario y suficiente para resolver un problema no lineal generalizado de autovalores ($2N \times 2N$) para sistemas multibanda y multicomponente. Si existe un polinomio unipotente en una variable del GEP, entonces se puede descomponer el GEP en matrices triangulares superiores por medio de una triangularización simultánea. Al aplicar este método a los huecos pesados (hh) y ligeros (lh) descritos con el modelo de Kohn-Luttinger de (4×4), encontramos que no existe restricción alguna para establecer condiciones suficientes y necesarias al obtener el espectro a partir del GEP. Se encuentra una muy buena concordancia con los requisitos impuestos para los huecos hh y lh desacoplados en varios compuestos semiconductores III-V. El GaAs claramente invierte su papel de pozo de potencial, convirtiéndose en una barrera potencial efectiva para lh , a medida que crece el vector de onda transversal κ_T en la dirección principal de transmisión. Para el caso de AIs las propiedades estándar como una barrera potencial están garantizadas, sin embargo al aumentar κ_T surgen estados degenerados en los que ya no es posible distinguir huecos ligeros (lh) de huecos pesados (hh) para los valores propios de κ_z . Estas evidencias subrayan la aparición de una serie de características atractivas, mediadas por el refuerzo del acoplamiento de $hh - lh$, por lo que es posible considerar que estas serán de utilidad en diversas aplicaciones experimentales, así como en el análisis teórico del tiempo de tunelaje de fase. Creemos que, hasta cierto punto, este esquema es válido con algunos cambios menores para cualquier modelo, en el marco de la teoría de masa efectiva multibanda (EFA).

1. Contexto y relevancia temática.

El rápido avance de la tecnología de los semiconductores ha proporcionado una fructífera interacción entre la teoría y el experimento. Podemos controlar actualmente, la composición química de los semiconductores en la escala subatómica. Las tecnologías claves en este desarrollo son las técnicas de crecimiento epitaxial, refinadas en las últimas dos décadas, especialmente para los semiconductores del grupo III-V [51][52][53][54][55][56]. La epitaxia o crecimiento epitaxial es uno de los procesos en la fabricación de circuitos integrados. A partir de una cara de un cristal de material semiconductor, o sustrato, se hace crecer una capa uniforme y de poco espesor con la misma estructura cristalina que este. Mediante esta técnica se puede controlar de forma muy precisa el nivel de impurezas en el semiconductor, que son los que definen su carácter (N o P). Para hacer esto se calienta el semiconductor hasta casi su punto de fusión y se pone en contacto con el material de base para que, al enfriarse, recristalice con la estructura adecuada. Hay varios métodos: Crecimiento epitaxial en fase vapor (VPE), crecimiento epitaxial en fase líquida (LPE), crecimiento epitaxial por haces moleculares (MBE) y química metalorgánica por deposición a vapor (MOCVD).

Estos avances han generado en los últimos años diversos tipos de sistemas semiconductores de dimensionalidad reducida, entre los que podemos citar los sistemas delta-dopados, pozos cuánticos, superredes, hilos cuánticos, puntos cuánticos [57][58][59] y más recientemente las estructuras espintrónicas [51] todos con impresionantes aplicaciones en la Informática, la Microelectrónica, la Biotecnología y la Industria Farmacéutica, el sector energético y la preservación del medio ambiente, entre otros. Los semiconductores nanoestructurados se caracterizan por un relativo confinamiento selectivo de portadores y/o de las oscilaciones de la red en estructuras de tipo: cuasi-bidimensional (Q2D), cuasi-unidimensional (Q1D) y cuasi-cero dimensional (Q0D)(Figuras 1 y 2).

Estas importantes tecnologías han generado la posibilidad de diseño de novedosos dispositivos electrónicos y fotónicos como los diodos de tunelaje resonante [63], los fotodiodos de avalancha [64][65], el láser de pozo cuántico [66], el transistor de tunelaje resonante [65][67][68] y el transistor de efecto de campo [69].

Las mayores prestaciones de estos dispositivos apuntan fundamentalmente hacia bajas corrientes umbrales; bajo consumo de potencia en *régimen de altas frecuencias*; detección de campos magnéticos extremadamente débiles de interés en la Biotecnología y la Genética; alta movilidad de los portadores de carga.

Las ventajas prácticas de los dispositivos semiconductores nanoestructurados se asocian con los materiales que se emplean, la geometría de la estructura, el aumento de la movilidad de los portadores [62], la separación espacial de los portadores de carga (electrones y huecos) de las impurezas que le dieron origen [56] y que permite una reducción de la dispersión entre ambos.

Cuando se colocan varios pozos cuánticos suficientemente cerca unos de otros se produce un acoplamiento resonante entre los estados electrónicos de los pozos, de forma que los niveles se desdoblán y dan lugar a la aparición de minibandas. En este caso se habla de superredes (Figura 3), que presentan estados extendidos en la dirección Z debido al efecto túnel resonante entre los pozos. El origen de las minibandas es exactamente el mismo que el de las bandas de energía en un sólido, donde en el caso de las superredes los niveles individuales no pertenecen a un único átomo sino a un pozo cuántico. En este sentido la superred se comporta como un sólido artificial pero con una periodicidad mucho mayor (decenas o unos pocos cientos de Å) que la de cualquier sólido. Esta mayor periodicidad en el espacio real hace que la zona de Brillouin de la superred sea mucho más pequeña, y de ahí el nombre de *minibandas*. La modulación de la banda de conducción en una superred presenta un aspecto similar al conocido potencial de Kronig-Penney.

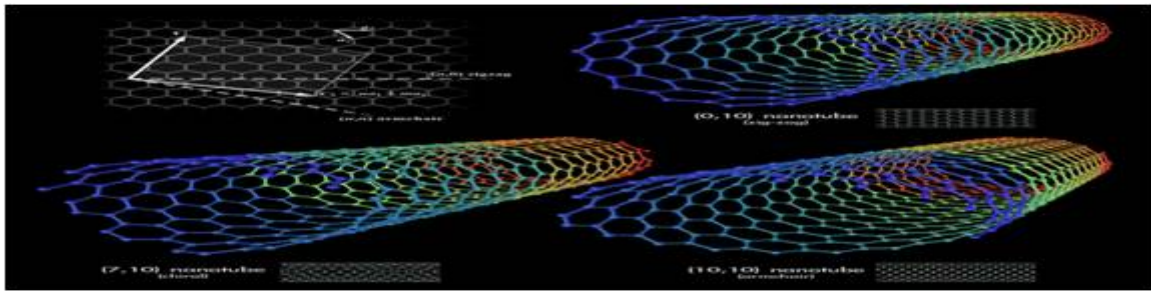


Figura 1: Hilos cuánticos (nanotubos de carbono). http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Types_of_Carbon_Nanotubes.png

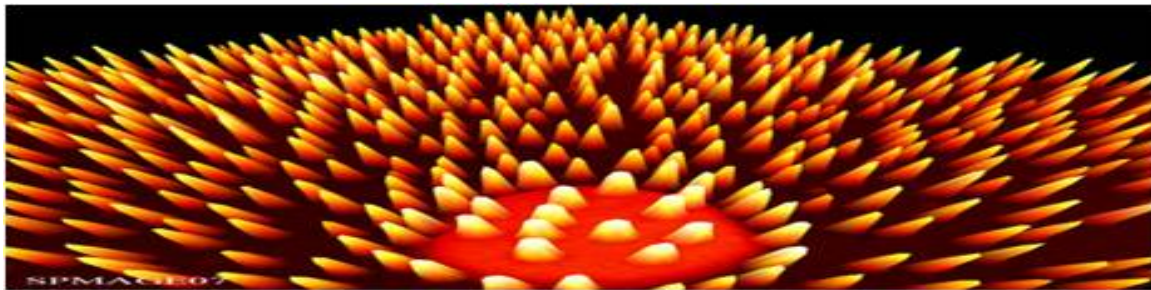


Figura 2: Puntos cuánticos de sílice sobre germanio. SPMage Prize 07 (<http://www.icmm.csic.es/spmage/>), Mr Thorsten Dziomba. Physikalisch-Technische Bundesanstalt (Germany)

Los sistemas delta dopados en particular se conforman por estructuras electrónicas de pozos cuánticos consistentes en una capa atómica dopada tipo p dentro de una matriz pura, para el cálculo de niveles de energía, funciones de onda, repartición de la población electrónica entre las distintas subbandas, así como la dependencia de estas magnitudes con la densidad de impurezas en la capa.

2. Motivación del problema de investigación.

El problema de la pérdida de unitariedad en el cálculo de magnitudes de transporte cuántico representa, hoy en día, un problema no resuelto.

Entre otras referencias bibliográficas recientes en los que se observa pérdida de unitariedad en el cálculo de magnitudes de transporte cuántico, se destacan las siguientes: M. Morifuji and C. Hamaguchi [70], A. di Carlo, A. Reale [71], R. Wessel and M. Altarelli [8], L. Diago-Cisneros, H. Rodríguez-Coppola, R. Pérez- Álvarez, and P. Pereyra [5], Wang y Vasilopoulos [9].

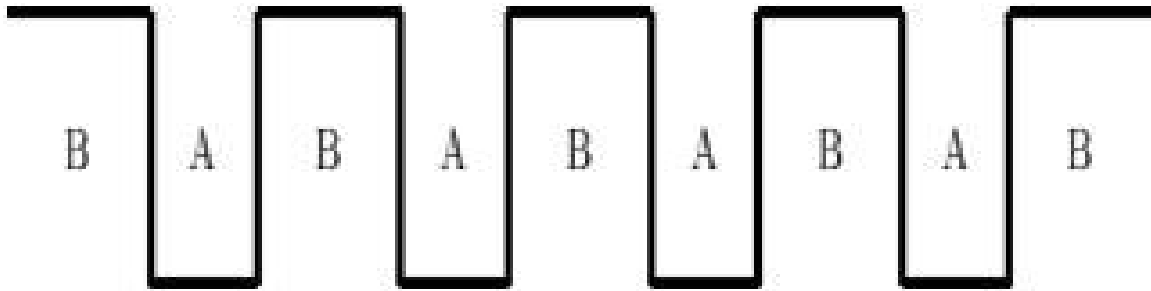


Figura 3: Diagrama de la banda de conducción en una superred

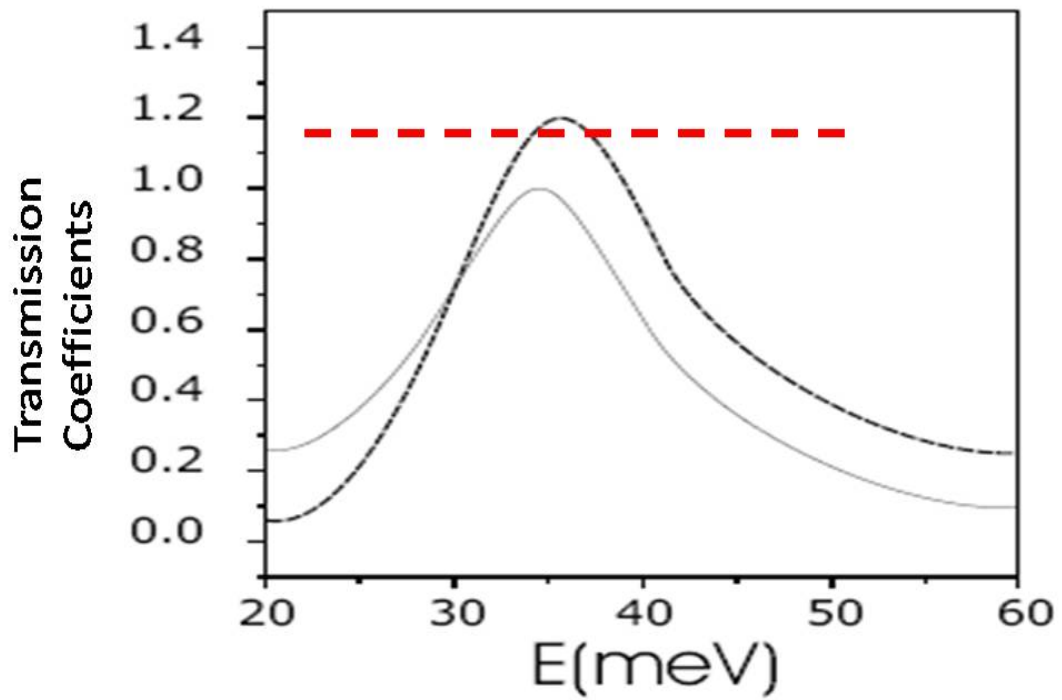


Figura 4: Coeficientes de transmisión superiores a la unidad para valores grandes de la magnitud que caracteriza la mezcla de huecos. A.D. Sánchez y C.R. Poetto, *J. Phys., Condens., Matter* 7, 2059 (1995).

3. Metodología.

Nos enfocamos en el problema que surge de un sistema de ecuaciones diferenciales N -acoplado del segundo orden en el marco de la aproximación de la función envolvente (EFA) [12][14]. La aproximación de masa efectiva multi-banda (EFA) es un formalismo que describe los bordes de banda cuando éstos están alejados suficientemente de sus vecinos cercanos y se emplea para analizar propiedades electrónicas de semiconductores. Común para estudios de impurezas y tunelaje (empleando matrices de transferencia, hamiltonianos de transferencia o métodos clásico WKB). EFA toma en cuenta la mezcla de las bandas degeneradas de valencia, en la cual la función de onda se expresa en términos de las funciones envolventes F_j (suaves en la celda unitaria) y las funciones de Bloch (que tienen la periodicidad de la red).

La ecuación dinámica en forma matricial, como un problema de frontera de Sturm-Liouville, para sistemas multicapa y multicomponente, invariante bajo traslaciones en el plano $[x, y]$ está dada por [28][29]:

$$\frac{d}{dz} \left[B(z) \frac{dF(z)}{dz} + P(z)F(z) \right] + Y(z) \frac{dF(z)}{dz} + W(z)F(z) = O_{N \times 1}, \quad (1)$$

donde $B(z)$ y $W(z)$ son, en general, matrices hermitianas ($N \times N$) y se cumple que $Y(z) = -P^\dagger(z)$. O_N es la matriz nula de dimensión ($N \times 1$) y z se encuentran a lo largo de la dirección de cuantización. [28][29], $B(z)^\dagger = B(z)$, $P(z)^\dagger = \pm P(z)$ y $W(z)^\dagger = W(z) = V(z) - E_N$.

La solución $F(z)$ es un vector N -componente, denominado campo o función de onda envolvente de estado de huecos, en lo general se puede proponer en la forma:

$$F(z) = \sum_{j=1}^{2N} \alpha_j e^{i(\kappa_z)_j z} \varphi_j = \sum_{j=1}^{2N} \alpha_j F_j(z). \quad (2)$$

α_j son los coeficientes de combinación lineal y las constantes de normalización correspondientes para $F_j(z)$ en el espacio de configuración. Las cantidades κ_z son reales o complejas y φ_j es un espinor ($N \times 1$).

Sustituyendo Ec. (2) en Ec. (1) se obtiene el denominado problema cuadrático de autovalores (QEP)

$$Q(\kappa_z) = \{\kappa_z^2 M + \kappa_z C + K\} \varphi = O_{N \times 1}. \quad (3)$$

Aquí M , C y K son matrices ($N \times N$), que en general dependen de z , se puede encontrar una caracterización detallada de la Ec. (3) en la Tabla 1 de la Referencia [3]. A continuación, nos enfocaremos en el caso en el que M , C y K son matrices hermitianas, y por lo tanto κ_z es real o surge en pares conjugados (κ_z, κ_z^*).

Realizando una primera linealización de $Q(\kappa_z)$ mediante el cambio de variable $\mu = \kappa_z \varphi$

$$(\kappa_z M \mu + C \mu + K \varphi) = \{\kappa_z M + C\} \mu + K \varphi = O_{N \times 1}, \quad (4)$$

lo que nos conduce a un problema generalizado de autovalores GEP asociado [1][2][3]:

$$\begin{pmatrix} O_N & N \\ -K & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \mu \end{pmatrix} - \kappa_z \begin{pmatrix} N & O_N \\ O_N & M \end{pmatrix} = O_{2N \times 1}. \quad (5)$$

$$\{A - \kappa_z B\} \begin{pmatrix} \varphi \\ \mu \end{pmatrix} = O_{2N \times 1}. \quad (6)$$

Como regla, se toma $N = I_N$ o como un múltiplo de I_N , digamos $N = \|M\|I_N$ tomando el rango de la matriz M como coeficiente. En términos generales, es suficiente que N sea cualquier matriz no singular ($N \times N$).

4. Desarrollo.

Es posible obtener una reducción numérica estable mediante la descomposición generalizada de Schur, dos matrices A y B son simultáneamente triangularizables cuando existe una transformación de similitud U tal que [37]:

$$T_A = U^\dagger A U \quad y \quad T_B = U^\dagger B U, \quad (7)$$

sean matrices triangulares superiores.

Una matriz X se denomina unipotente si todos los valores propios son iguales a 1 o, lo que es equivalente, una matriz X sobre un campo es unipotente si y solo si su polinomio característico es $(x - 1)^n$, esto es, la matriz $(X - I_n)$ es nilpotente.

Sean A y B invertibles, si $D = ABA^{-1}B^{-1}$ es un polinomio en A , luego entonces A y B son simultáneamente triangularizables si y sólo si D es unipotente [38].

Luego entonces A y B son simultáneamente triangularizables si N , M y K invertibles y NMN^{-2} y $KNK^{-1}M^{-1}$ unipotentes.

Valores propios de la matriz D :

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{1}{d_{12}} \right) \left((b_1^2 + b_2^2)(H_{12}^2 + h_{12}^2) \pm \sqrt{G_{12}}(b_2 - b_1) - \{2a_1 a_2 b_1 b_2\} \right), \quad (8)$$

donde

$$d_{12} = 2b_1 b_2 [H_{12}^2 + h_{12}^2 - a_1 a_2]$$

$$G_{12} = [H_{12}^2 + h_{12}^2] \{ [H_{12}^2 + h_{12}^2] (b_1 + b_2)^2 - 4a_1 a_2 b_1 b_2 \}. \quad (9)$$

5. Resultados.

Un ejemplo: *El modelo hamiltoniano (4×4) de dos bandas Kohn-Luttinger (KL)* [5][20]

$$H_{KL} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 \\ H_{12}^* & H_{22} & 0 & -H_{13} \\ H_{13}^* & 0 & H_{22} & H_{12} \\ 0 & -H_{13}^* & H_{12}^* & H_{11} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} H_{11} &= A_1 \kappa_T^2 + V(z) - B_2 \partial^2 / \partial z^2, \\ H_{12} &= (\hbar^2 \sqrt{3} / 2m_0) (\gamma_2 (k_y^2 - k_x^2) + 2i\gamma_3 k_x k_y), \\ H_{13} &= (\hbar^2 \sqrt{3} / 2m_0) \gamma_3 (k_x - ik_y) \partial / \partial z, \\ H_{22} &= A_2 \kappa_T^2 + V(z) - B_1 \partial^2 / \partial z^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_0^2 R(\gamma_1 + \gamma_2), \\
A_2 &= a_0^2 R(\gamma_1 - \gamma_2), \\
a_1 &= A_1(k_x^2 + k_y^2) + V(z) - E, \\
a_2 &= A_2(k_x^2 + k_y^2) + V(z) - E, \\
B_1 &= a_0^2 R(\gamma_1 + 2\gamma_2), \\
B_2 &= a_0^2 R(\gamma_1 - 2\gamma_2), \\
h_{12} &= a_0^2 R\sqrt{3}\gamma_2(k_y^2 - k_x^2),
\end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3$ [Parámetros semi-empíricos de valencia de banda de Lüttinger]. R constante de Rhydberg, a_0 Radio de Bohr], V altura de la barrera estacionaria finita. E energía de incidente y de los modos de propagación], k_x, k_y [Componentes del vector de onda transversal].

En el modelo (4×4) KL, los coeficientes de la matriz de la Ec. (3) tienen una relación simple [5]:

$$M = -B, \quad C = 2iP, \quad K = W. \quad (11)$$

Entonces, después de un poco de álgebra, los coeficientes de la matriz de la Ec. (3) se pueden presentar como

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_{13} + iH_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_{13} - iH_{13} \\ h_{13} - iH_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_{13} + iH_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$K = \begin{pmatrix} a_1 & b_{12} + iH_{12} & 0 & 0 \\ b_{12} - iH_{12} & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & h_{12} + iH_{12} \\ 0 & 0 & h_{12} - iH_{12} & a_1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$N = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_4 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

El QEP asociado para las matrices dadas por Ecs. (12), (13) y (14) es regular y no singular y por lo tanto, tiene ocho valores propios finitos que son pares conjugados reales o complejos.

$$\det(\kappa_z^2 M + \kappa_z C + K) = q_0 \kappa_z^8 + q_1 \kappa_z^6 + q_2 \kappa_z^4 + q_3 \kappa_z^2 + q_4. \quad (16)$$

Con q_i son funciones de los parámetros semi-empíricos de la banda de valencia de Luttinger, $q_0 = \det(M)$

El efecto de la mezcla de huecos influye en la condición de unitariedad de las magnitudes física de transporte, por consiguiente en la naturaleza de las matrices y por ende en la condición de triangularización simultánea.

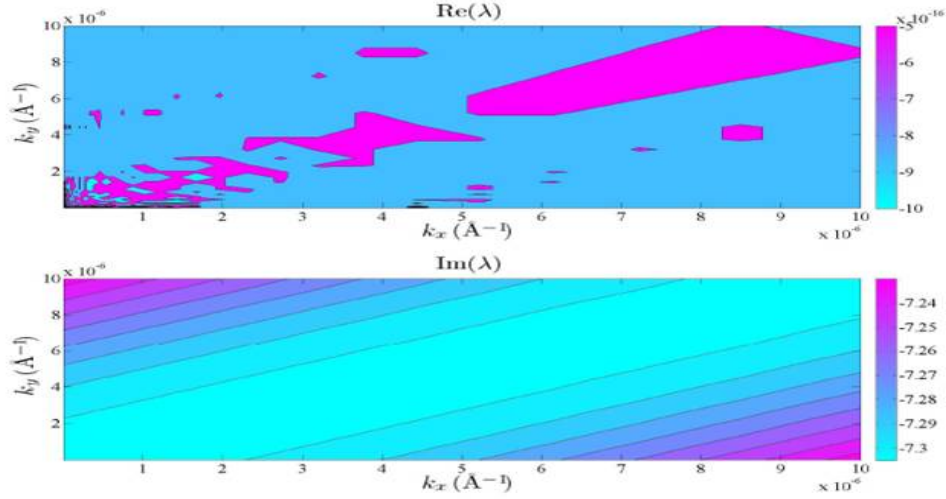


Figura 5: El panel superior muestra los contornos del mapa de densidad de $Re(\lambda_1)$ como una función de los componentes de cuasi-momento. El panel inferior traza la gráfica para la parte imaginaria $Im(\lambda_1)$. Hemos usado $\log_{10}[Re(\lambda_1)]$, para GaAs en el intervalo $\kappa_T \in [10^{-12}, 10^{-5}]A^{-1}$.

Analizamos los casos para GaAs y AlAs, y a partir de ellos encontramos cuatro diferentes valores propios con una multiplicidad algebraica de 2. A su vez, cada uno de estos valores propios también tiene una multiplicidad geométrica de 2. A partir de esta evidencia tenemos razones de peso para pensar que el espectro de cualquier compuesto que se parezca a III-V tendrá características similares.

La Fig. (7) ilustra el papel de la mezcla de bandas con $\kappa_T \in [10^{-3}; 10^1] \text{ \AA}^{-1}$ en el espectro κ_z de la heteroestructura. El panel superior de la figura para el GaAs se obtienen 8 valores propios son reales (tractos horizontales), por lo que los huecos pesados hh (tractos externos) y los huecos ligeros lh (tractos internos) sienten un pozo cuántico (QW). Al alcanzar κ_T un valor de $8 \times 10^{-2}; 10^{-1} \text{ \AA}^{-1}$, encontramos que 4 valores propios hh se convierten en imaginarios puros (tractos verticales), sin embargo estas soluciones no son permitidas oscilatoriamente en el QW, esto es, la capa GaAs, se convierte en una barrera potencial efectiva para lh y permanece como una QW for hh .

El panel inferior muestra la evolución del lugar geométrico de κ_z en la tableta AlAs. Para el intervalo en el que $\kappa_T \in [10^{-3}; 3,5 \times 10^{-2}] \text{ \AA}^{-1}$, todos los valores propios de κ_z para hh (tractos verticales externos) y lh siguen siendo imaginarios puros tal y como se esperaba (tractos verticales), por lo tanto las propiedades estándar de esta capa como una barrera potencial están garantizadas. Al alcanzar κ_T un valor aproximado a $3,5 \times 10^{-2} \text{ \AA}^{-1}$ surgen estados degenerados en donde ya no es posible distinguir a lh de hh por los valores propios de κ_z . Estas observaciones muestran concordancia con los resultados reportados para compuestos del grupo III-V por R. Pérez-Álvarez y F. García Moliner [13] y por V. Milanovic y D. Tjapkin [49].

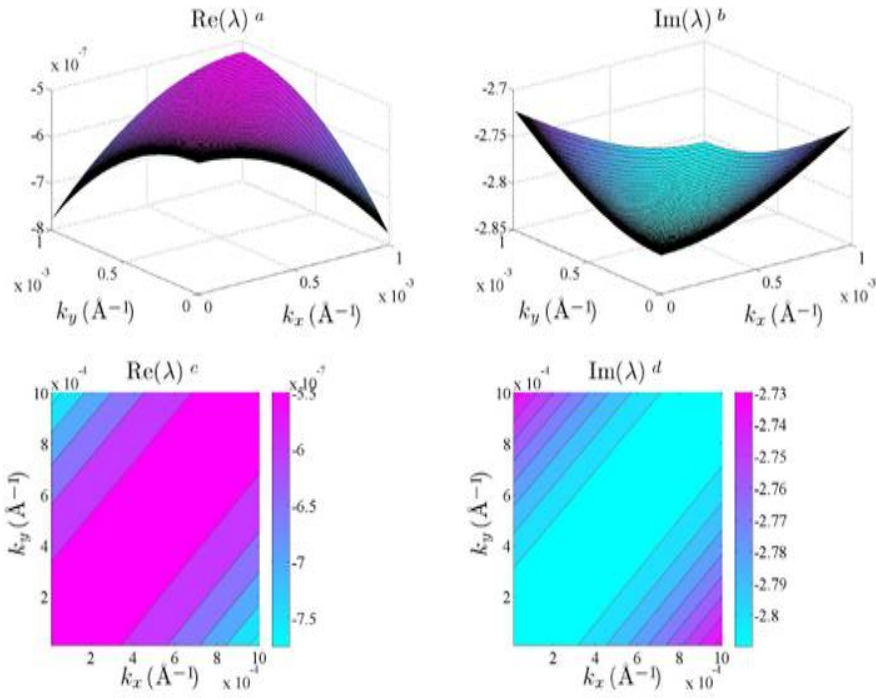


Figura 6: a) y b) Curvas tridimensionales $\log_{10}\|Re(\lambda_1)\|$ y $\log_{10}\|Im(\lambda_1)\|$, c) y d) Contornos de la proyección espacial como una función del cuasi-momento de los componentes k_x , k_y para GaAs, con $\kappa_T \in [10^{-5}, 10^{-3}] \text{ \AA}^{-1}$

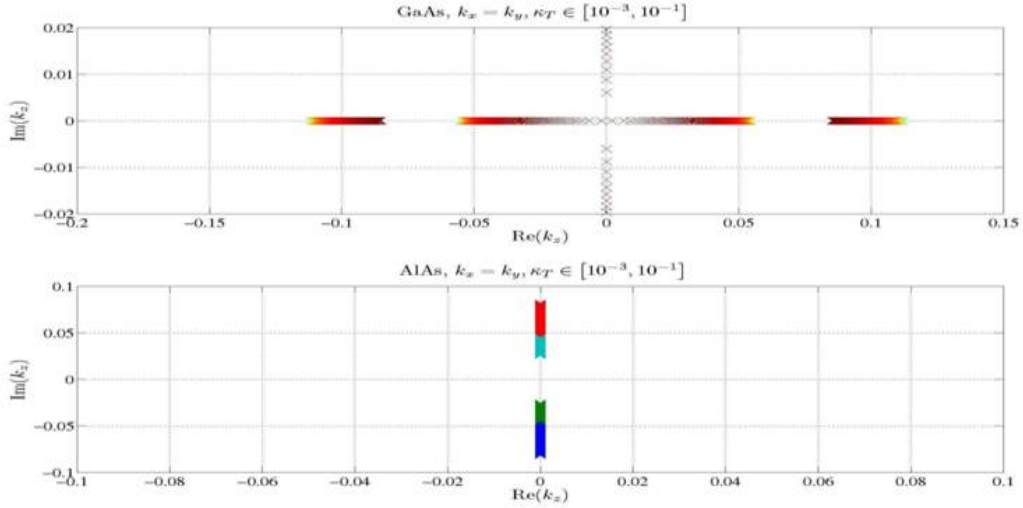


Figura 7: Comportamiento del lugar geométrico para las raíces de κ_z tomadas del QEP, como una función de $k_x = k_y$ para a) GaAs y b) AlAs.

6. Conclusiones

- Es posible utilizar con buenos resultados, herramientas de otros campos, como es el caso del teorema de triangularización simultánea, en problemas de transporte cuántico de sistemas multibanda y multicomponente.
- Al aplicar este método a los huecos pesados y ligeros descritos con el modelo de Kohn-Luttinger de (4×4) , encontramos que no existe restricción para establecer condiciones suficientes y necesarias al obtener el espectro a partir de un GEP.
- Al crecer κ_T se incrementa el efecto de mezcla de huecos. El GaAs claramente invierte su papel de QW, convirtiéndose en una barrera potencial efectiva para lh .
- Para el caso del AlAs las propiedades estándar como una barrera potencial están garantizadas. Al alcanzar κ_T un valor aproximado a $3,5 \times 10^{-2} \text{ \AA}^{-1}$ surgen estados degenerados en donde ya no es posible distinguir a lh de hh por los valores propios de κ_z .
- Estas evidencias subrayan la aparición de una serie de características atractivas, mediadas por el refuerzo del acoplamiento de $hh - lh$, por lo que es posible considerar que estas serán de utilidad en diversas aplicaciones experimentales.
- Creemos que, hasta cierto punto, este esquema podría ser válido, con algunos cambios menores, para cualquier modelo en el marco de la teoría EFA.

Referencias

- [1] P. Lancaster, *Lambda-Matrices and Vibrating Systems* (Editorial Pergamon Press, Oxford, UK, 1966).
- [2] I. Gohberg, P. Lancaster y L. Rodman, *Matrix Polynomials* (Editorial Academic Press, New York, 1982).
- [3] F. Tisseur and K. Meerbergen, *SIAM Review* 43, 235 (2001).
- [4] H. Voss, *Comput. Phys. Comm.* 174, 441 (2006).
- [5] L. Diago-Cisneros, H. Rodríguez-Coppola, R. Pérez-Álvarez, and P. Pereyra, *Phys. Rev. B* 74, 045308 (2006).
- [6] L. Diago-Cisneros, H. Rodríguez-Coppola R. Pérez-Álvarez and P. Pereyra, *Rev. Mex. Fís. S*, 53:7, 99 (2007).
- [7] A. D. Sánchez and C. R. Proetto, *J. Phys: Condens. Matter* 7, 2059 (1995).
- [8] R. Wessel and M. Altarelli, *Phys. Rev. B* 39, 12802 (1989).
- [9] X. F. Wang and P. Vasilopoulos, *Phys. Rev. B* 72, 165336 (2005).
- [10] S. Arias-Laso, L. Diago-Cisneros, *Rev. Cub. Phys.*, on peer-review (2009).
- [11] L. Diago-Cisneros, H. Rodríguez-Coppola, R. Pérez-Álvarez, and P. Pereyra, *Phys. Scr.* 741, 582 (2005).
- [12] M. G. Burt, *J. Phys: Condens. Matter* 4, 4964 (1992).
- [13] Rolando Pérez-Álvarez and Federico García-Moliner, *Transfer Matrix, Green Function and related techniques: Tools for the study of multilayer heterostructures*, (ed. Universitat Jaume I, Castellón de la Plana, España), 2004.
- [14] B. A. Foreman, *Phys. Rev. B* 48, 4964 (1993).
- [15] L. Diago-Cisneros, G. Fernández-Anaya and G. Bonfanti-Escalera, *Phys. Scr.* 78, 035004 (2008).
- [16] J. O. Dimmock and G. B. Wright, *Phys. Rev. A* 135, 821 (1964).
- [17] F. García-Moliner and V. R. Velasco, *Theory of Single and Multiple Interfaces*, (World Scientific, Singapore, 1992).
- [18] H. Rodríguez-Coppola, V. R. Velasco, F. García-Moliner and R. Pérez-Álvarez, *Phys. Scr.* 42, 115 (1990).
- [19] C. Trallero-Giner, R. Pérez-Álvarez and F. García-Moliner, *Long wave polar modes in semiconductor heterostructures*, (Elsevier Science, 1998).
- [20] J. M. Luttinger and W. Kohn, *Phys. Rev.* 97, 869 (1955).
- [21] E. O. Kane, *J. Phys. Chem. Solids* 1, 249 (1957).

- [22] R. Winkler, Phys. Rev. B 62, 4245 (2000).
- [23] C. B. Moler and G. W. Stewart, SIAM J. Numer. Anal. 10, 241 (1973).
- [24] M. Haardt, K. Hüper, J. Moore and J. Nossek, *Proceedings of EUSIPCO-96*, (Trieste, Italy, 1996) vol.1, pp.531-534.
- [25] M. Haard and J. A. Nossek, IEEE 46, 161 (1998).
- [26] L. de Lathauwer, B. de Moore, and J. Vandewalle, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 26, 295 (2004).
- [27] Leonard Ho-nung, Ren-Cang Li, Qiang Ye, Linear Algebra Appl. 415, 52 (2006)
- [28] A. M. Malik, M. J. Godfrey and P. Dawson, Phys. Rev. B 59, 2861 (1999).
- [29] R. Pérez-Alvarez, C. Trallero-Herrero and F. García-Moliner, European Journal of Physics 22, 275 (2001).
- [30] H. Goldstein, *Mecánica Clásica* (Editorial Reverte, Madrid, 1961), cap.2
- [31] L. C. Andreani, A. Pasquarello and F. Bassani, Phys. Rev. B 36, 5887 (1987).
- [32] D. A. Broido and L. J. Sham, Phys. Rev. B 31, 888 (1985).
- [33] J. N. Schulman and Yia-Chung Chang, Phys. Rev. B 31, 2056 (1985).
- [34] G. Goldoni and A. Fasolino, Phys. Rev. B 51, 9903 (1995).
- [35] L. Diago-Cisneros, H. Rodríguez-Coppola and R. Pérez-Alvarez, Rev. Mex. Fis. 46, 337 (2000).
- [36] V. Mehrmann and H. Voss, GAMM 27, 121 (2004).
- [37] G. H. Golub and C. F. van Loan, *Matrix Computations* (Johns Hopkins University Press, 3rd. ed. Baltimore, USA, 1996).
- [38] H. Shapiro, Paci-c Journal of Mathematics, 181:3, 323 (1997).
- [39] H. Rodríguez-Coppola, L. Diago-Cisneros, R. Pérez-Alvarez and P. Pereyra J. App. Phys., in preparation (2009)
- [40] I. Vurga-man, J. R. Mayer, and L. R. Ram-Moham, J. App. Phys. 89:11, 5815 (2001).
- [41] Peter Lancaster and Miron Tismenetsky *The Theory of Matrices with Applications* (Second edition. Editorial Academic Press, New York, USA, 1985), chapter 10.
- [42] G. Klicmeck, R. Ch. Bowen, and T. B. Boykin, Superlattices and Microstructures 29, 187 (2001).
- [43] W. Zawadski and P. Pfe-er, Semicond. Sci. Technol. 19, R1 (2004).
- [44] Grbic, R. Leturcq, T. Ihn, K. Ensslin, D. Reuter, and A. D. Wieck, Phys. Rev. Lett. 99, 176803 (2007).
- [45] Dimitrije Stepanenko, Minchul Lee, Guido Burkard, and Daniel Loss, Phys. Rev. B 79, 235301 (2009).

- [46] V. Romero Rochín, R. P. Duarte-Zamorano, S. Nilsen Hofseth y R. G. Barrera, *Phys. Rev. E* **63**, 027601 (2001).
- [47] P. Singha Neo y S. Bandopadhyay, arXiv: cond-mat/ 0102095 v8 (2004).
- [48] E. H. Hauge and J. Støvneng, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 917 (1989).
- [49] V. Milanovic, and D. Tjapkin, *Phys. Stat. Sol(b)* **110**, 685 (1988).
- [50] L. Diago-Cisneros, H. Rodríguez-Coppola, R. Pérez-Álvarez, and P. Pereyra, *Microelectronics Journal* **35**, 49 (2004).
- [51] David D. Awschalom and M. Flatt´e, *Nature* **3**, 153 (2007).
- [52] J. W. Mathews, *Epitaxial Growth* (Academic Press, New York, 1975).
- [53] J. T. Sánchez, H. R. Coppola, and G. A. Reig, *Nanoestructuras Semiconductoras: Fundamentos y aplicaciones*, Cap. 2, pp. 123 (Reprograf ´a Doppel, S. L., Madrid, 2003).
- [54] J. Singh, *Semiconductor Optoelectronics: Physics and Technology* (McGraw-Hill, New York, 1995).
- [55] F. Capasso, *Physics Today* **22**, (1990).
- [56] J. Lee, H. . N. Spector, and V. K. Arora, *J. Appl. Phys.* **54**, 6995 (1983).
- [57] L. Esaki, *J. Physique* **45**, C5 (1984).
- [58] R. Pérez- Álvarez, *Propiedades de heteroestructuras semiconductoras cuánticas*, Vol 1, pp. 41 (Revista: 100cias@uned, UNED, Madrid, 1984).
- [59] H. Sakaki, *Solid State Communications* **92**, 119 (1994).
- [60] K. Hess, *Physics Today* **34**, (1994).
- [61] A. M. Price, *Physica B* **118**, 750 (1983).
- [62] J. P. Leburton, *Phys. Rev. B* **45**, 11022 (1992-I).
- [63] R. Tsu and L. Esaki, *Appl. Phys. Lett.* **22**, 562 (1973).
- [64] N. Holonyak, R. M. Kolbas, R. D. Dupuis, and P. D. Dapkus, *IEEE Journal of Quantum Electronics* **QE-12**, 170 .
- [65] F. Capasso, *Ann. Rev. Mater. Sci.* **16**, 263 (1986).
- [66] Y. Arakawa and H. Sakaki, *Appl. Phys. Lett.* **40**, 939 (1982).
- [67] F. Capasso, K. Mohammed, and A. Y. Cho, *IEEE Journal of Quantum Electronics* **Q-22**, 1853 (1986).
- [68] F. Capasso and R. Kiehl, *J. Appl. Phys.* **58**, 1366 (1985). 2930 Propiedades cu´anticas de huecos

- [69] T. K. Woodward, T. C. McGill, H. F. Chung, and R. D. Burnham, *Appl. Phys. Lett* 51, 1542 (1987).
- [70] M. Morifuji and C. Hamaguchi, *Phys. Rev. B* 52, 14131 (1995).
- [71] A. di Carlo, A. Reale, L. Tocca, and P. Lugli, *IEEE Journal of Quantum Electronics* 34, 1730 (1998).
- [72] M. U. Erdogan, K. W. Kim, and M. A. Stroschio, *App. Phys. Lett.* 62, 1423 (1993).
- [73] S. L. Chuang, *Phys. Rev. B* 40, 10379 (1989).